Dissertation

Abstrakte Periodenräume, Projektoren und Spuren von Heckeoperatoren

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

seit 1558

vorgelegt dem Rat der Fakultät für
Mathematik und Informatik der
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von
Dipl.-Math. Alexander Gast
geboren am 8. Januar 1975 in Erfurt
(Deutschland)

Gutachter:

(1) PD. Dr. Klaus Haberland (FSU Jena)

(2) Prof. Dr. David J. Green (FSU Jena)

(3) Prof. Dr. Ulf Kühn (Universität Hamburg)

Tag der öffentlichen Verteidigung: 28. November 2018

Erklärung

Hiermit erkläre ich ehrenwörtlich,

(1) daß mir die geltende Promotionsordnung der Fakultät bekannt ist;

(2) daß ich die Dissertation selbst angefertigt habe und keine Textabschnitte oder Ergebnisse eines Dritten oder eigener Prüfungsarbeiten ohne Kennzeichnung übernommen wurden und alle von mir benutzten Hilfsmittel, persönlichen Mitteilungen und Quellen in meiner Arbeit angegeben wurden;

(3) daß die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen wurde;

(4) daß Dritte weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen von mir für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt meiner vorgelegten Dissertation stehen;

(5) daß ich die Dissertation noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe;

(6) daß ich weder die gleiche, eine in wesentlichen Teilen ähnliche oder eine andere Abhandlung bei einer anderen Hochschule als Dissertation eingereicht habe.

Danksagung

Ich möchte mich hiermit in besonderem Maße bei meinem Betreuer Herrn Dr. Haberland für seine wissenschaftliche und methodische Unterstützung meiner Dissertation bedanken. In vielen fachlichen Gesprächen erhielt ich von ihm wertvolle Ratschläge, die für mich auf dem Weg zur fertigen Arbeit stets hilfreich waren.

Ein großer Dank gilt meiner Familie und besonders meiner Freundin Annedore, die mir während der Arbeit an meiner Dissertation unermüdlich zur Seite standen.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis v

Zusammenfassung vii

1 Abstrakte Periodenräume **1**

§1. Grundlagen 1

§2. Bernoulli-Operatoren 12

§3. Der Projektor p_B 16

§4. Zerlegung von A durch den ε-Operator 19

§5. Der Eichler-Shimura-Isomorphismus 21

2 Beispiel Level $\boldsymbol{\Gamma(1)}$ und gerades Gewicht $\boldsymbol{k > 2}$ **32**

3 Beispiel Level $\boldsymbol{\Gamma_0(p)}$ und Gewicht $\boldsymbol{k = 2}$ **42**

4 Heckeoperatoren **64**

§1. Grundlagen 64

§2. Heckeoperatoren 70

§3. Abstrakte Spurformeln 82

5 Spuren von Heckeoperatoren **84**

§1. Grundlagen und Organisation der Spurformel 84

§2. Der elementare Spuranteil 88

§3. Der nichtelementare Spuranteil 95

§4. Vergleich mit der Spurformel von Zagier 114

§5. Eisensteinreihen 121

Literaturverzeichnis **125**

Zusammenfassung

Mein Promotionsthema liegt in der Schnittmenge von Arithmetik und Funktionentheorie. Es betrifft eine neue Methode, um *elliptische Modulformen* zu studieren. Elliptische Modulformen sind seit einigen Jahrzehnten ein vielstudiertes Gebiet der reinen Mathematik mit zahlreichen Verbindungen zu anderen mathematischen Objekten. Dies sind zum Beispiel elliptische Kurven, quadratische Formen, Galoisdarstellungen sowie Objekte aus der Codierungstheorie und Kombinatorik.

Es folgt nun eine Kurzbeschreibung des Themas dieser Arbeit:

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (z. B. eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$). Dann operiert Γ von links auf $\mathscr{H}^*$ (= obere Halbene $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ vereinigt mit den Spitzen $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$) durch *Möbiustransformationen*:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ z \in \mathscr{H}^*.$$

Unter einer elliptischen Modulform vom Gewicht $k \geq 2$ und der Stufe Γ versteht man eine auf $\mathscr{H}$ und in den Spitzen holomorphe Funktion mit folgendem Transformationsverhalten:

$$f(z) = (c\,z+d)^{-k} \cdot f\left(\frac{a\,z+b}{c\,z+d}\right) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Die Gesamtheit aller Modulformen vom Gewicht k und der Stufe Γ bildet einen endlichdimensionalen Vektorraum über $\mathbb{C}$, den man mit $M_k(\Gamma)$ bezeichnet. Mit $S_k(\Gamma)$ bezeichnet man den Teilraum der *Spitzenformen.* Einer Spitzenform ordnet man, durch Integration entlang von Zyklen, ihre *Perioden* zu. Ein Satz von EICHLER-SHIMURA identifiziert Vektorräume von Modulformen mit Vektorräumen von Polynomen (*Periodenpolynome*). In den 1980er Jahren haben sich vor allem YU. I. MANIN und D. ZAGIER mit diesen Perioden beschäftigt. Es gelang ihnen, die Aktion der Heckeoperatoren auf den Periodenräumen als

Aktion gewisser ganzzahliger 2×2-Matrizen zu verstehen und die Spuren der Heckeoperatoren auf eine ganz neue Weise zu berechnen. Zagier erhält in [32] eine Spurformel mit analytischen Mitteln, in dem er eine Formel aus [12] benutzt, die das Skalarprodukt zweier Modulformen durch ihre Perioden ausdrückt. In meiner Promotionsarbeit wird ebenfalls das Ziel verfolgt, Spurformeln für Heckeoperatoren zu gewinnen. Der dafür gewählte Zugang ist rein algebraischer Natur und wesentlich allgemeiner, der im Kern auf einem neuen, in dieser Arbeit entwickeltem *Projektor* auf den *abstrakten Periodenraum* basiert. Erwartet werden Formeln für die Spur der Heckeoperatoren auf dem Raum $S_k(\Gamma_0(N))$ der Spitzenformen vom Gewicht $k \geq 2$ und der Stufe $\Gamma_0(N)$ $(N \geq 1)$ in Termen von spezifischen diophantischen Gleichungen und Ungleichungen. Da sich diese Spurformeln erheblich von den klassischen Spurformeln von Eichler-Selberg unterscheiden, ist ein direkter Vergleich von großem Interesse. Das Vorbild für diesen Vergleich sollte die schon erwähnte Arbeit [32] von D. Zagier sein, dort wird der Fall der Stufe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ behandelt, den wir in dieser Arbeit ausführlich untersuchen. Zur ergänzenden Betrachtung und historischen Einordnung der Thematik sei abschließend noch auf die Quellen [20], [31], [11] und [19] hingewiesen.

Kapitel 1:

Abstrakte Periodenräume

Als natürliche Verallgemeinerung der Periodenräume von Modulformen betrachten wir in diesem Kapitel *abstrakte Periodenräume.* Wir werden die Gruppenaktion der vollen Modulgruppe untersuchen und als Hauptergebnis einen *Projektor* auf den Periodenraum erhalten. Projektoren dieser Art spielen eine zentrale Rolle zur Gewinnung von Spurformeln von Heckoperatoren, welche ausführlich in den Folgekapiteln behandelt werden. Der *Eichler-Shimura-Isomorphismus* charakterisiert elliptische Modulformen vollständig durch ihre *Perioden.* Die zugehörigen Periodenräume sind endlich-dimensionale Vektorräume. Wir werden am Ende dieses Kapitels die Projektoren auf Periodenräumen zur vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ für ein beliebiges Gewicht $k > 2$ und zu den Kongruenzuntergruppen der Form $\Gamma_0(p)$ für eine Primzahl $p > 3$ und Gewicht 2 untersuchen.

§1. Grundlagen

Mit Γ oder $\Gamma(1)$ (oder auch Γ_1) bezeichnen wir die *volle Modulgruppe*, d. h. die (nicht-kommutative, unendliche) Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ aller 2×2-Matrizen $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}$ der Determinante $\det(\gamma) = a\,d - b\,c = 1$. Die Matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element von Γ, welches wir auch häufig als 1 schreiben. Nach [28, S. 81] hat Γ die wohlbekannte Präsentation

$$\Gamma = \big\langle S, T\colon S^4 = I,\, (TS)^3 = S^2 \big\rangle,$$

wobei

$$T =_{\text{def.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S =_{\text{def.}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht, daß T unendliche Ordnung und S endliche Ordnung 4 hat. Sei weiterhin

$$U =_{\text{def.}} T\,S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann hat U Ordnung 6, und nach [28, Seite 11] können wir die Modulgruppe auffassen als *amalgamiertes Produkt* der Form

$$\Gamma = \langle S \rangle *_{\langle -I \rangle} \langle U \rangle \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\,\mathbb{Z}} *_{\mathbb{Z}/_{2\,\mathbb{Z}}} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{6\,\mathbb{Z}}. \tag{1.1}$$

Daher hat jedes Element $\gamma \in \Gamma$ die Gestalt

$$\gamma = \pm I\, S^{\alpha}\, U^{\alpha_1}\, S\, U^{\alpha_2}\, S \cdots S\, U^{\alpha_k}\, S^{\omega} \tag{1.2}$$

für eindeutig bestimmte Exponenten $0 \leq \alpha,\, \omega \leq 1$ und $1 \leq \alpha_j \leq 2$ $(1 \leq j \leq k)$.

Unter der *Wortlänge* von γ verstehen wir die natürliche Zahl

$$l(\gamma) =_{\text{def.}} \alpha + \omega + (k-1) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j. \tag{1.3}$$

Für die weiteren Betrachtungen seien ein Körper K der Charakteristik 0 und ein $K[\Gamma]$-(Rechts-) Modul A gegeben. Das heißt, daß A ein (endlich-dimensionaler) K-Vektorraum mit einer linearen Rechtsaktion des Gruppenringes $K[\Gamma] = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} K\,\gamma$ ist, so daß für alle $a,\, b \in A$, $k_i \in K$ und $\gamma,\, \gamma_i \in \Gamma$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(1) $a\big|1 = a$,

(2) $(a+b)\big|\gamma = a\big|\gamma + b\big|\gamma$,

(3) $a\big|\sum_{i=1}^{n} k_i\,\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\,\left(a\big|\gamma_i\right)$.

Wir fordern außerdem, daß $-I$ stets trivial auf A operiert.

Bemerkung. Es ist zu beachten, daß $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ trivial auf A operiert, aber $-1_K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ als Element des Gruppenringes $K[\Gamma]$ als Multiplikation mit $-1 \in K$ zu lesen ist.

Bemerkung. Da $-I$ trivial auf A operiert, betrachtet man statt der Modulgruppe Γ auch oft die zugehörige *projektive Modulgruppe* $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$. Diese kann als freies Produkt der zyklischen Gruppen der Ordnung 2 und 3 aufgefaßt werden, d. h.:

$$\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z}) = {}^{\Gamma}\!/_{\langle -I \rangle} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\,\mathbb{Z}} * {}^{\mathbb{Z}}\!/_{3\,\mathbb{Z}}.$$

Eine zentrale Rolle spielen jene Elemente aus A, die die sogenannten *Periodenrelationen* erfüllen.

(1.4) *Definition.* Der Teilraum

$$W(A) =_{\mathrm{def}} \Big\{ a \in A \colon a\big|(1+S) = a\big|(1+U+U^2) = 0 \Big\}$$

von A heißt *abstrakter Periodenraum.*

Um den Apparat der Gruppencohomologie anwenden zu können, werden wir die Elemente aus $W(A)$ cohomologisch als 1-Cozyklen mit gewissen Zusatzeigenschaften interpretieren. Bevor wir dies jedoch tun, erinnern wir an den Begriff des *coinduzierten Moduls* (vgl. z. B. [10, Chap. 4, p. 36] oder [3, Chap. V, p. 67]).

(1.5) *Definition.* Ist Γ' eine Untergruppe von Γ, und A' ein Γ'-Modul, so können wir A'

den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) *coinduzierten* Γ-Modul

$$\begin{aligned}\operatorname{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma}(A') &=_{\text{def.}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma']}\Big(\mathbb{Z}[\Gamma],\, A'\Big)\\ &= \Big\{f\colon \Gamma \to A' \mid f(\gamma\,\delta) = f(\gamma)\big|\delta,\ \forall\,\gamma\in\Gamma,\ \forall\,\delta\in\Gamma'\Big\}\end{aligned}$$

zuordnen. Die *(Rechts-) Aktion* von Γ auf $\operatorname{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma}(A')$ wird wie folgt definiert:

$$\big(f\big|\gamma\big)\,(\delta) =_{\text{def.}} f(\gamma\,\delta), \qquad \gamma, \delta \in \Gamma.$$

Wir deuten nun A, unter Restriktion, als $K[\langle -I\rangle]$-, $K[\langle S\rangle]$- und $K[\langle U\rangle]$- Modul resp. Die zugehörigen coinduzierten $K[\Gamma]$-Moduln sind dann:

$$\begin{aligned} M(A) &=_{\text{def.}} \operatorname{Coind}_{\langle -I\rangle}^{\Gamma}(A) = \{f\colon \Gamma \to A\colon f(-\gamma) = f(\gamma),\, \forall\gamma\in\Gamma\}\,,\\ M_1(A) &=_{\text{def.}} \operatorname{Coind}_{\langle S\rangle}^{\Gamma}(A) = \Big\{f\colon \Gamma \to A\colon f(\gamma\,S) = f(\gamma)\Big|S,\, \forall\gamma\in\Gamma\Big\}\,,\\ M_2(A) &=_{\text{def.}} \operatorname{Coind}_{\langle U\rangle}^{\Gamma}(A) = \Big\{f\colon \Gamma \to A\colon f(\gamma\,U) = f(\gamma)\Big|U,\, \forall\gamma\in\Gamma\Big\}\,.\end{aligned}$$

Für die so gewonnenen $K[\Gamma]$-Moduln gibt es eine kurze exakte Sequenz, die wir nun in zwei Schritten herleiten. Dazu bemerken wir, daß die direkte Summe $M_1(A) \oplus M_2(A)$ ein $K[\Gamma]$-(Rechts-) Modul ist, wobei die Aktion durch $(f, g)\Big|\gamma = \Big(f\Big|\gamma, g\Big|\gamma\Big)$ gegegen ist.

(1.6) Proposition. *Die Abbildung*

$$\beta\colon M_1(A) \oplus M_2(A) \longrightarrow M(A),$$

definiert durch

$$\beta(f, g) =_{\mathit{def.}} f - g, \quad f \in M_1(A),\, g \in M_2(A),$$

ist surjektiv.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung β kompatibel mit der Gruppenaktion ist, denn für $r = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_\gamma \gamma \in K[\Gamma]$ gilt $\beta((f,g)\big|r) = \beta((f\big|r, g\big|r)) = f\big|r - g\big|r = (f-g)\big|r = \beta(f,g)\big|r$. Die Wohldefiniertheit von β, also $f - g \in M(A)$, folgt nun wegen $S^2 = -I = U^3$, denn für $f \in M_1(A)$ gilt $f(\gamma) = f(\gamma)\big|S^2 = f(\gamma\big|S^2) = f(-\gamma)$ und analog $g(\gamma) = g(\gamma)\big|U^3 = g(\gamma\big|U^3) = g(-\gamma)$ für $g \in M_2(A)$. Die Surjektivität zeigen wir durch Induktion in der Wortlänge $l(\gamma)$ der Elemente $\gamma \in \Gamma$, dargestellt wie in 1.2. Dazu sei $h \in M(A)$ beliebig vorgeben. Wir legen die Werte $f(I) = f(-I)$ und $g(I) = g(-I)$ derart fest, daß $h(I) = f(I) - g(I)$ erfüllt ist. Sei die Relation $h(\gamma) = f(\gamma) - g(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ der Länge $l(\gamma) \leq n$ für ein festes $n \geq 1$ bereits erfüllt. Jedes Element aus Γ der Länge $n+1$ hat dann die Gestalt γS oder γU mit $l(\gamma) = n$. Im ersten Fall setzen wir $f(\gamma S) =_{\text{def.}} f(\gamma)\big|S$ und dann $g(\gamma S) =_{\text{def.}} f(\gamma S) - h(\gamma S)$. Im zweiten Fall setzen wir $g(\gamma U) =_{\text{def.}} g(\gamma)\big|U$ und dann $f(\gamma U) = h(\gamma U) + g(\gamma U)$. Insgesamt haben wir auf diese Weise Abbildungen $f \in M_1(A)$, $g \in M_2(A)$ mit der Eigenschaft $h = f - g$ gefunden. Diese sind eindeutig durch die Werte $f(I)$, $g(I)$ gegeben. (Durch Festlegung von $f(I)$ erhält man $g(I)$ wegen $g(I) = f(I) - h(I)$.) ■

(1.7) SATZ. *Sei*

$$\alpha\colon A \longrightarrow M_1(A) \oplus M_2(A)$$

definiert durch

$$\alpha(a) =_{def.} \left(\gamma \mapsto a\big|\gamma,\ \gamma \mapsto a\big|\gamma\right),\ a \in A,\ \gamma \in \Gamma, \tag{1.8}$$

dann ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \alpha\ } M_1(A) \oplus M_2(A) \xrightarrow{\ \beta\ } M(A) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz *von* $K[\Gamma]$*-(Rechts-) Moduln.*

Beweis. Aus der Definition und der Proposition folgt sofort, daß α, β wohldefiniert sind, α injektiv, β surjektiv und $\operatorname{im}(\alpha) \subseteq \ker(\beta)$ ist. Sei umgekehrt $(f,g) \in M_1(A) \oplus M_2(A)$ und $\beta(f,g) = 0$, dann gilt $f = g$ und somit $f, g \in M_1(A) \cap M_2(A)$. Setzt man $f(I) = a$, so folgt $f(\gamma) = f(I)|\gamma = a|\gamma$ aus den Eigenschaften von $M_1(A)$, $M_2(A)$ und der Darstellung 1.2, also $(f,g) \in \operatorname{im}(\alpha)$ und damit $\operatorname{im}(\alpha) = \ker(\beta)$. ■

Die im weiteren Text benutzten Begriffe aus der Gruppencohomologie kann man z. B. in [3], [4], [10] und [22] finden.

Die kurze exakte Sequenz des letzten Satzes liefert uns eine lange exakte Sequenz in der Gruppencohomologie:

$$0 \longrightarrow A^\Gamma \xrightarrow{\alpha} \big(M_1(A) \oplus M_2(A)\big)^\Gamma \xrightarrow{\beta} M(A)^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, A) \longrightarrow \cdots$$

Dabei haben wir $H^0(\Gamma, A) = A^\Gamma$ ($A^\Gamma \subseteq A$ ist die Gruppe der Fixpunkte unter der Aktion von Γ.), und analog für alle weiteren Moduln, sowie

$$H^1(\Gamma, A) = Z^1(\Gamma, A) \Big/ B^1(\Gamma, A)$$

benutzt. $H^1(\Gamma, A)$ ist die Faktorgruppe der Gruppe $Z^1(\Gamma, A)$ aller 1-*Cozyklen*, d. h. aller Abbildungen $f\colon \Gamma \to A$ mit

$$f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1)\big|\gamma_2 + f(\gamma_2), \quad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,$$

modulo der Untergruppe aller 1-*Coränder* $B^1(\Gamma, A)$, d. h. aller Abbildungen $f\colon \Gamma \to A$, die sich in der Form

$$f(\gamma) = a_f\big|(\gamma - 1)$$

für ein $a_f \in A$ schreiben lassen. (Jeder 1-Corand ist automatisch ein 1-Cozyklus, denn $a_f|(\gamma_1\gamma_2 - 1) = \big(a_f|\,(\gamma_1 - 1)\,\big)|\gamma_2 + a_f|(\gamma_2 - 1)$.)

Bemerkung. Aus der Definition folgt sofort, daß jeder 1-Cozyklus $\varphi \in Z^1(\Gamma, A)$ auf dem neutralen Element verschwindet, denn es gilt $\varphi(I) = \varphi(I \cdot I) = \varphi(I)\Big|I + \varphi(I)$, also $0 = \varphi(I) - \varphi(I) = \varphi(I)$. Da $-I$ trivial auf A operiert, folgt weiter $0 = \varphi((-I)\cdot(-I)) = \varphi(-I)\Big| - I + \varphi(-I)$, also $\varphi(-I) + \varphi(-I) = 0$, aber i. Allg. nicht $\varphi(-I) = 0$.

Wir können die lange exakte Sequenz auch in einer modifizierten Weise aufschreiben. Dazu benötigen wir die nächsten beiden Sätze.

(1.9) SATZ. ([3, Chap. III, Corollary 10.2, p. 84]) *Sei A ein $K[G]$-(Rechts-) Modul und G eine endliche Gruppe, deren Ordnung in A invertierbar ist, dann gilt $H^i(G, A) = 0$ für alle $i > 0$.*

(1.10) SHAPIROS LEMMA. *Sei Γ' eine Untergruppe von Γ und A' ein $K[\Gamma']$- (Rechts-) Modul, dann gibt es für jedes $i \geq 0$ einen kanonischen Isomorphismus:*

$$H^i\left(\Gamma, \mathrm{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma}(A)\right) \xrightarrow{\sim} H^i(\Gamma', A').$$

(1.11) MAYER-VIETORIES-SEQUENZ. *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow A^{\Gamma} \longrightarrow A^{\langle S\rangle} \oplus A^{\langle U\rangle} \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, A) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Die Aussage folgt wegen

$$\big(M_1(A) \oplus M_2(A)\big)^{\Gamma} \cong A^{\langle S\rangle} \oplus A^{\langle U\rangle}, \quad M(A)^{\Gamma} \cong A^{\langle -I\rangle} = A$$

und

$$H^1\big(\Gamma, M_1(A) \oplus M_2(A)\big) \cong H^1(\langle S\rangle, A) \oplus H^1(\langle U\rangle, A) = 0.$$

■

In [28] findet man die Verallgemeinerung der angegebenen Mayer-Vietories-Sequenz für beliebige Gruppen der Form $G = G_1 *_{G_{12}} G_2$.

(1.12) *δ-Homomorphismus.* Die Übergänge $H^i(\Gamma, M(A)) \longrightarrow H^{i+1}(\Gamma, A)$ in der langen exakten Cohomologiesequenz sind durch den zugehörigen δ-*Homomorphismus* (*Verbindungshomomorphimus*) gegeben. Dessen allgemeine Konstruktion ist etwa in [22] nachzulesen. Für unsere Betrachtungen ist insbesondere von Interesse:

$$\delta\colon M(A)^\Gamma \longrightarrow H^1(\Gamma, A).$$

Startet man mit $a \in A$, dann wird dadurch eine auf ganz Γ konstante Funktion $f_a \in M(A)^\Gamma$ mit Wert a definiert. Da β surjektiv ist, gibt es $(f,g) \in M_1(A) \oplus M_2(A)$, so daß $\beta(f,g) = f - g = f_a$ gilt. Für beliebiges $\gamma \in \Gamma$ gilt, unter Ausnutzung, daß β ein Γ-Homomorphismus ist: $\beta((f,g)\Big|(\gamma-1)) = \beta(f,g)\Big|\gamma - \beta(f,g)\Big| = f_a\Big|\gamma - f_a = f_a - f_a = 0$. Also liegt $(f,g)\Big|(\gamma-1) = (f\Big|\gamma - f, g\Big|\gamma - g)$ in $\ker(\beta) = \operatorname{im}(\alpha)$. Daher gibt es ein $a_\gamma \in A$, so daß $(f\Big|\gamma - f)(\sigma) = (g\Big|\gamma - g)(\sigma) = f(\gamma\sigma) - f(\sigma) = a_\gamma\Big|\sigma$ für alle $\sigma \in \Gamma$ gilt. Setzt man $\sigma = 1$ ein, so folgt $a_\gamma = f(\gamma) - f(1)$. Die Abbildung $\gamma \longmapsto a_\gamma = f(\gamma) - f(1)$ ist dann ein 1-Cozyklus aus $Z^1(\Gamma, A)$. Der Verbindungshomomorphismus ist dann gegeben durch:

$$\delta(a) = \delta(f_a) = \gamma \longmapsto [a_\gamma] = f(\gamma) - f(1) + B^1(\Gamma, A).$$

(1.13) *Definition.* Ein 1-Cozyklus $\varphi\colon \Gamma \longrightarrow A$ heißt *parabolisch*, falls $\varphi(T) = 0$ und $\varphi(-I) = 0$ gilt. Die Gruppe aller *parabolischen* 1-Cozyklen bezeichnen wir mit

$$H_c^1 = Z_c^1.$$

Parabolische 1-Cozyklen werden unter anderem in [12], [24] oder [33] eingeführt. Sie stehen, wie der nächste Satz zeigt, in direktem Zusammenhang mit den Perioden von A, die aus dem Kontext der Theorie der elliptischen Modulformen stammen und diese vollständig charakterisieren (*Eichler-Shimura-Isomorphismus*). Die auftretenden Periodenräume sind alle endlich-dimensional.

Mit Blick auf den nächsten Satz halten wir fest, daß die parabolischen 1-Cozyklen $\varphi\colon \Gamma \longrightarrow A$ die folgenden Gleichungen für beliebige $\gamma \in \Gamma$ erfüllen:

- $\varphi(T\gamma) = \varphi(T)\big|\gamma + \varphi(\gamma) = \varphi(\gamma)$,
- $\varphi(-I\gamma) = \varphi(-I)\big|\gamma + \varphi(\gamma) = \varphi(\gamma)$.

(1.14) SATZ. *Die kanonische Abbildung*

$$H^1_c(\Gamma, A) \longrightarrow W(A), \quad \varphi \longmapsto \varphi(S)$$

ist ein (K-Vektorraum-) Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert. Um dies einzusehen, müssen wir für $\varphi(S)$ die Periodenrelationen nachweisen. Es gilt $\varphi(S)\big|(1+S) = \varphi(S)+\varphi(S)\big|S = \varphi(S^2) = \varphi(-I) = 0$ und $\varphi(S)\big|(1+U+U^2) = \varphi(TS)\big|(1+U+U^2) = \varphi(U)+\varphi(U)\big|U+\varphi(U)\big|U^2 = \varphi(U^2)+\varphi(U)\big|U^2 = \varphi(U^3) = \varphi(-I) = 0$. Der Cozyklus φ ist bereits vollständig durch seinen Wert an der Stelle S festgelegt. Sei also $\varphi(S) = 0$, dann folgt wegen $\varphi(T) = 0$, $\varphi(-I) = 0$ und der Cozykluseigenschaft von φ die Injektivität, denn gegebenenfalls ist $\varphi(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Zur Surjektivität vergleiche man [12, Chap. 2.4, Lemma 8]. ■

Definition. Mit Γ_∞ bezeichnen wir die von den beiden Matrizen $\pm T$ erzeugte Untergruppe von Γ, d. h.:

$$\Gamma_\infty = \langle \pm T \rangle.$$

Damit läßt sich $Z^1_c(\Gamma, A)$ auch deuten als die Gruppe aller 1-Cozyklen, die eingeschränkt auf die Gruppe Γ_∞ unter der Restriktionsabbildung trivial sind, d. h.:

$$H^1_c(\Gamma, A) = \ker\left(Z^1(\Gamma, A) \longrightarrow Z^1(\Gamma_\infty, A)\right).$$

Wir erhalten damit, als Spezialfall von [12, Lemma 1, p. 251], die später noch nützliche exakte Sequenz:

$$
\begin{array}{c}
0 \longrightarrow H^0(\Gamma, A) \longrightarrow H^0(\Gamma_\infty, A) \longrightarrow H^1_c(\Gamma, A) \\
\downarrow \\
H^1(\Gamma, A) \longrightarrow H^1(\Gamma_\infty, A) \longrightarrow H^2_c(\Gamma, A) \longrightarrow 0
\end{array}
\tag{1.15}
$$

Zur Formulierung der nächsten Aussagen betrachten wir weitere Teilräume von A.

(1.16) *Definition.*

$$A_\alpha =_{\text{def.}} \ker(T-1) = A^{\Gamma_\infty} = H^0\big(\Gamma_\infty, A\big),$$
$$A_\omega =_{\text{def.}} \operatorname{im}(T-1),$$
$$A_c =_{\text{def.}} \big\{a \in A\colon a\big|(S-1) \in A_\omega\big\}.$$

Der folgende Satz gibt Aufschluß darüber, welche Elemente beim Übergang von A zur ersten Cohomologiegruppe $H^1 = Z^1/B^1$ via δ-Homomorphismus auf jene Klassen abgebildet werden, die von parabolischen 1-Cozyklen aus $Z^1(\Gamma, A)$ repräsentiert werden.

(1.17) PROPOSITION. *Für jedes $a \in A$ gilt $a\big|(S-T) \in A_\omega \iff a\big|(S-1) \in A_\omega \iff a\big|(1-S) \in A_\omega$.*

Beweis. $a\big|(S-T) \in \operatorname{im}(T-1) \Leftrightarrow \bigvee_{b\in A} a\big|(S-T) = b\big|(T-1) \Leftrightarrow \bigvee_{b\in A} a\big|S - a\big|T = b\big|T - b \Leftrightarrow \bigvee_{b\in A} a\big|S - a = b\big|T + a\big|T - b - a \Leftrightarrow \bigvee_{b\in A} a\big|(S-1) = (b+a)\big|(T-1) \Leftrightarrow a\big|(S-1) \in \operatorname{im}(T-1)$. Die zweite Äquivalenz gilt, da die Inversenbildung $a \longmapsto -a$ ein Automorphismus auf A_ω ist. ($\bigvee$ ist der Existenzquantor $\exists$.) ■

(1.18) SATZ. *Der Raum A_c besteht aus allen Elementen $a \in A$ mit $\delta(a) \in H^1_p(\Gamma, A)$, wobei*

$$H^1_p(\Gamma, A) =_{def.} \operatorname{im}\Big(H^1_c(\Gamma, A) \longrightarrow H^1(\Gamma, A)\Big). \tag{1.19}$$

Beweis. Sei $f_a : \Gamma \longrightarrow A$ die konstante Abbildung $\gamma \longmapsto a \in A$, dann existiert ein Paar $(f, g) \in M_1(A) \oplus M_2(A)$ mit $f - g = f_a$, wobei f, g eindeutig bis auf ein Element aus $\alpha(A)$ bestimmt sind. Nach Bemerkung 1.12 ist dann $\delta(a) = \delta(f_a) = \big[\gamma \longmapsto f(\gamma) - f(1)\big]$, d. h. jeder 1-Cozyklus $\varphi \in \delta(a)$ hat die Form $\gamma \longmapsto f(\gamma) - f(1) + b\big|(\gamma - 1)$ für ein $b \in A$. Sei f derart gewählt, daß $f(1) = 0$ gilt, dann folgt $g(1) = -a$ und damit $\delta(a) = [\gamma \longmapsto f(\gamma)]$. Weiterhin ist $\delta(a)(U) = \delta(a)(T\,S) = f(T\,S) + a_f\big|(T\,S - 1)$. Andererseits gilt $a = f(T\,S) - g(T\,S) = f(T\,S) - g(1)\big|T\,S = f(T\,S) + a\big|T\,S$, also $a\big|(1 - T\,S) = f(T\,S) = f(T)\big|S$. Da $-S^{-1} = S$ gilt und $-I$ trivial auf A operiert, folgt daraus durch Multiplikation beider Seiten mit S^{-1} die Gleichung

$$f(T) = a\big|(S - T).$$

Damit haben wir gezeigt, daß φ genau dann parabolisch ist, wenn ein $b \in A$ mit

$$0 = \varphi(T) = f(T) + b\Big|(T - 1) = a\Big|(S - T) + b\Big|(T - 1) \tag{1.20}$$

existiert. Dies ist aber, unter Zuhilfenahme von 1.17, genau dann erfüllt, wenn $a\Big|(S - 1) \in A_\omega = \operatorname{im}(T - 1)$ gilt. ■

(1.21) *Bemerkung.* Für jeden parabolischen 1-Cozyklus $\varphi \in \delta(f_a)$ erhält man $b \in A$ aus der Gleichung

$$\varphi(S) = b\big|(S - 1),$$

denn mit den Bezeichnungen aus dem Beweis gilt $\varphi(S) = f(S) + b\Big|(S - 1)$, wobei $f(S) = f(1)\Big|S = 0$ wegen $f(1) = 0$ folgt.

(1.22) *Definition.* Die Untergruppe $H^1_p(\Gamma, A)$ von $H^1(\Gamma, A)$ heißt *parabolische Cohomologiegruppe*, es gilt:

$$H^1_p(\Gamma, A) \cong \mathrm{Z}^1_\mathrm{c}(\Gamma, \mathrm{A}) \Big/ \Big(Z^1_c(\Gamma, A) \cap B^1(\Gamma, A)\Big).$$

(1.23) *Bemerkung.* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] & H^1(\Gamma, A) \\ A_c \arrow[u] \arrow[r, "\delta"'] & H^1_p(\Gamma, A) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei die vertikalen Pfeile die kanonischen Inklusionen darstellen.

§2. Bernoulli-Operatoren

Die in diesem Abschnitt betrachtete Klasse von Operatoren spielen eine zentrale Rolle bei der Gewinnung der Projektoren des anschließenden Abschnittes.

(1.24) *Definition.* Unter einem *Bernoulli-Operator* versteht man einen linearen Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$, so daß

$$a\Big|B\,(T-1) = a, \quad \forall\, a \in A_\omega$$

gilt. (D. h. $B\,(T-1)$ ist die Indentität $A_\omega \longrightarrow A_\omega$.)

(1.25) PROPOSITION. *Für jeden Bernoulli-Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ existiert genau eine lineare Abbildung $\lambda_B\colon A \longrightarrow A_\alpha$ mit der Eigenschaft:*

$$1 + \lambda_B = \big(T-1\big)\,B \ \ \textit{auf}\ A.$$

Beweis. Wir definieren λ_B auf A durch $a\Big|\lambda_B =_{\text{def.}} a\Big|(T-1)\,B - a$, wobei $a \in A$. Dann folgt aus der Definition des Bernoulli-Operators $a\Big|\lambda_B\,(T-1) = a\Big|(T-1) - a\Big|(T-1) = 0$, also ist $a\Big|\lambda_B$ aus A_α. Die Eindeutigkeit von $a\Big|\lambda$ folgt direkt aus der geforderten Eigenschaft, denn für jedes $a \in A$ ist der Wert $a + a\Big|\lambda$ durch die rechte Seite festgelegt. ∎

(1.26) Satz. *Durch*

$$\widehat{r_B} =_{def.} (S-1)\left(B+\frac{1}{2}\right)(S-1)$$

ist ein linearer Operator

$$\widehat{r_B}\colon A_c \longrightarrow W(A)$$

gegeben.

Beweis. Für $a \in A_c$ ist $a\big|(S-1) \in A_\omega$ und damit A_c als Definitionsbereich für r_B geeignet gewählt. Wir zeigen nun, daß r_B nach $W(A)$ abbildet. Aus $(S-1)(S+1) = S^2+S-S-1 = 0$ folgt sofort die erste Periodenrelation, denn $r_B(1+S) = 0$. Durch Ausmultiplizieren erhält man weiterhin $S\,U^2 = -T^{-1}$, so daß $S\,U^2$ und T^{-1} als Operatoren auf A identisch sind. Es folgt $(S-1)(1+U+U^2) = S+S\,U+S\,U^2-(1+U+U^2) = S+S\,U+S\,U^2-(T\,S+T\,S\,U+1) = (1-T)(S+S\,U+T^{-1})$, also

$$(S-1)(1+U+U^2) = -(T-1)\left(S+S\,U+T^{-1}\right).$$

Da zudem $B\,(T-1)$ die Identität auf A_ω ist und U^{-1} und U^2 identisch auf A operieren, folgt

$$B\,(S-1)(1+U+U^2) = -(S+S\,U+T^{-1}) = -S\,(1+U+U^2).$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit $(S-1)$ von links ergibt

$$(S-1)\,B\,(S-1)(1+U+U^2) = -(1-S)(1+U+U^2)$$

bzw.

$$\Big((S-1)\,B\,(S-1)+(1-S)\Big)(1+U+U^2) = 0,$$

so daß aus

$$\widehat{r_B} = (S-1)\left(B+\frac{1}{2}\right)(S-1) = \Big((S-1)\,B\,(S-1)+(1-S)\Big)$$

die Behauptung folgt. Für die letzte Gleichung haben wir die Umformung $\frac{1}{2}\left(S-1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(S^2-2S+1\right) = 1-S$ benutzt. ■

(1.27) KOROLLAR. *Durch*

$$r_B =_{def.} -\widehat{r_B} = \left(1-S\right)\left(B+\frac{1}{2}\right)\left(S-1\right)$$

ist ein linearer Operator

$$r_B\colon A_c \longrightarrow W(A)$$

gegeben.

Beweis. Die Aussage folgt, da die Zuordnung $a \longmapsto -a$ ein $W(A)$-Automorphismus ist. ■

(1.28) SATZ. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r_B"'] & H^1_p(\Gamma, A) \\ W(A) \arrow[r, leftrightarrow, "1.14"'] & H^1_c(\Gamma, A) \arrow[u, "\text{proj.}"'] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Beweis. Sei $a \in A_c$ dann ist $\delta(a) = [\varphi]$ für einen parabolischen 1-Cozyklus $\varphi \in H^1_c(\Gamma, A)$. Nach 1.20 gibt es ein $b \in A$ mit

$$a\Big|(T-S) = b\Big|(T-1) \quad \text{und} \quad \varphi(S) = b\Big|(S-1).$$

Auf der anderen Seite existiert wegen 1.14 ein eindeutig bestimmter parabolischer 1-Cozyklus $\psi \in H^1_c(\Gamma, A)$ mit

$$\psi(S) = a\Big|r_B.$$

Zu zeigen ist, daß $[\varphi] = [\psi]$ gilt, also $\varphi - \psi$ ein 1-Corand ist, d. h. es gibt ein $\hat{b} \in A$, so daß $(\varphi - \psi)(\gamma) = \gamma \mapsto \hat{b}\Big|(\gamma - 1)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Für die Differenz $c =_{\text{def.}} b - a$ folgt sofort

$$c\Big|(T-1) = b\Big|(T-1) - a\Big|(T-1) = a\Big|(T-S) - a\Big|(T-1) = a\Big|(1-S).$$

Wenden wir den Bernoulli-Operator auf beiden Seiten an, dann erhalten wir unter Ausnutzung der Eigenschaft 1.25 die Gleichung

$$a\Big|(1-S)\,B = c\Big|(T-1)\,B = c\Big|(1+\lambda_B)$$

und weiter

$$\begin{aligned} a\Big|(1-S)\,B\,(S-1) &= c\Big|(S-1) - c\Big|\lambda_B\,(S-1) \\ &= b\Big|(S-1) - a\Big|(S-1) + \left(c\Big|\lambda_B\right)\Big|(S-1), \end{aligned}$$

was äquivalent zu

$$a\Big|\Big((1-S)\,B\,(S-1) + (S-1)\Big) = a\Big|r_B = \varphi(S) + \left(c\Big|\lambda_B\right)\Big|(S-1)$$

bzw. zu

$$\psi(S) - \varphi(S) = \hat{b}\Big|(S-1)$$

für $\hat{b} =_{\text{def.}} c\Big|\lambda_B \in A_\alpha$ ist. Wegen $\left(c\Big|\lambda_B\right)\Big|(T-1) = 0$ gilt die Gleichung auch an der Stelle T. An der Stelle $-I$ gilt sie trivialerweise, so daß wir die gesuchte Corandeigenschaft schlußfolgern können:

$$\psi(\gamma) - \varphi(\gamma) = \hat{b}\Big|(\gamma - 1), \ \forall \gamma \in \Gamma.$$

■

§3. Der Projektor p_B

Wir kommen nun zum Hauptergebnis des Kapitels, der Gewinnung eines Projektors auf den Periodenraum $W(A)$.

(1.29) *Definition.* Für jeden Bernoulli–Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ betrachten wir den linearen Operator

$$p_B =_{\text{def.}} \big(T^{-1} - T\big)\, r_B\colon A_{cc} \longrightarrow A,$$

wobei das Definitionsgebiet gegeben ist durch:

$$A_{cc} = \Big\{a \in A\colon a\Big|(T - T^{-1}) \in A_c\Big\} = \Big\{a \in A\colon a\Big|(T^{-1} - T) \in A_c\Big\}.$$

Dann ist A_{cc} die größtmögliche Menge, auf der p_B wohldefiniert ist. Zusammen mit der Definition der Abbildung r_B erhalten wir:

$$p_B = (T^{-1} - T)(1 - S)\Big(B + \frac{1}{2}\Big)(S - 1) = (T - T^{-1})(S - 1)\Big(B + \frac{1}{2}\Big)(S - 1).$$

(1.30) Proposition.

$$p_B\colon A_{cc} \longrightarrow W(A)$$

Beweis. Die Aussage ist eine direkte Konsequenz von 1.27. ∎

(1.31) Proposition.

$$W(A) \subseteq A_{cc}$$

Beweis. Auf dem Periodenraum $W(A)$ gilt $1 + S = 0 = 1 + U + U^2$, also $S = U + U^2 =$

$TS + TSTS$. Daraus erhalten wir die sechs Gleichungen:

$$\begin{gathered} S = -1, \ -T^{-1} S = T^{-1}, \\ TS = S - TSTS, \quad T^{-1}S = S + STS, \\ T = 1 - TST, \quad T^{-1} = 1 + ST, \end{gathered} \tag{1.32}$$

wobei wir benutzt haben, daß S^2 als Identität auf A operiert. Es ist dann $T^{-1} - T = 1 + ST - 1 + TST = ST + TST$ und $T - T^{-1} = -ST - TST$. Weiterhin folgt

$$\bigl(T^{-1} - T\bigr) = (T - T^{-1})\, S \tag{1.33}$$

aus $\bigl(T^{-1} - T\bigr) = (T - T^{-1})\, S \iff ST + TST = -STS - TSTS \iff ST + TST = -(ST + TST)\, S \iff ST + TST + (ST + TST)\, S = 0 \iff (1 + S)\bigl(ST + TST\bigr) = 0$, da die letzte Gleichung auf $W(A)$ stets erfüllt ist. (Äquivalent dazu erhalten wir nach Multiplikation mit S von rechts die Gleichung $\bigl(T^{-1} - T\bigr)\ S = (T - T^{-1})$.) Für jedes $a \in W(A)$ folgt

$$\begin{aligned} a\Big|(T - T^{-1})(S - 1) &= \\ &= a\Big|(T - T^{-1})\, S - a\Big|(T - T^{-1}) \\ &= a\Big|(T^{-1} - T) + a\Big|(T^{-1} - T) \\ &= -2a\Big|(T - T^{-1}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Wegen

$$-2a\Big|(T - T^{-1}) = -2a\Big|(T - 1) + b\Big|(T - 1)$$

für $b = -2a\Big|T^{-1}$ folgt die Aussage, denn es gilt $a\Big|(T - T^{-1})(S - 1) \in A_\omega = \mathrm{im}(T - 1)$, was $a \in A_{cc}$ impliziert. ■

Bemerkung. Ein linearer Operator $p\colon V \to V$ wird als *Projektor* bezeichnet, wenn $p^2 = p$ gilt, so daß p eingeschränkt auf sein Bild als Identität operiert.

(1.35) THEOREM. *Der Operator p_B operiert auf dem Raum $W(A)$ als* (Quasi-) Projektor, *genauer ist:*

$$p_B\big|_{W(A)} = 6 \cdot \mathrm{Id}_{W(A)} - 2 \cdot (1 + T^{-1})\, \lambda_B\, (S-1).$$

Beweis. Sei $a \in W(A)$ beliebig vorgegeben, dann gilt, äquivalent zu 1.34, die Gleichung

$$a\Big|(T^{-1} - T)(1 - S) = 2a\Big|(T^{-1} - T).$$

Zusammen mit $(T^{-1} - T) = -(1 + T^{-1})(T - 1)$ erhält man

$$a\Big|(T^{-1} - T)(1 - S) = -2a\Big|(1 + T^{-1})(T - 1),$$

folglich ist

$$a\Big|(T^{-1} - T)(1 - S)B = -2a\Big|(1 + T^{-1})(T - 1)B = -2a\Big|(1 + T^{-1})(1 + \lambda_B)$$

und damit

$$a\Big|(T^{-1} - T)(1 - S)\big(B + \tfrac{1}{2}\big) = -2a\Big|(1 + T^{-1})(1 + \lambda_B) + a\Big|(T^{-1} - T).$$

Die Aussage gewinnen wir durch direkte Rechnung, indem wir die letzte Gleichung mit $(S-1)$ von rechts multiplizieren:

$$\begin{aligned} a\Big|p_B &= -2a\Big|(1 + T^{-1})(1 + \lambda_B)(S - 1) + a\Big|(T^{-1} - T)(S - 1) \\ &= -2a\Big|(1 + T^{-1})\lambda_B(S - 1) - 2a\Big|(1 + T^{-1})(S - 1) + a\Big|(T^{-1} - T)(S - 1). \end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$b =_{\text{def.}} 2a\Big|(1 + T^{-1})\lambda_B(S - 1)$$

und beachten

$$a\Big|(T^{-1} - T)(S - 1) = 2a\Big|(T - T^{-1}),$$

so folgt:

$$
\begin{aligned}
a\Big|p_B + b &= -2a\Big|\left(S + T^{-1}S - 1 - T^{-1}\right) + 2a\Big|(T - T^{-1}) \\
&= 2a\Big|\left(T - T^{-1} - S + 1 - T^{-1}S + T^{-1}\right) \\
&= 2a\Big|\left(2 + T - T^{-1}S\right) \\
&= 2a\Big|(2 + T - STST) \\
&= 4a + 2a\Big|(T + TST) \\
&= 4a + 2a\Big|(TS + TSTS)\,S \\
&= 4a - 2a\Big|S \\
&= 4a + 2a \\
&= 6a.
\end{aligned}
$$

Für die Umformungen haben wir die Gleichungen $TS + TSTS = U + U^2 = -1 = S$ sowie $T^{-1}\,S = STST$, die aus $(TS)^3 = -1$ und $S^2 = -1$ folgt, benutzt. ■

§4. Zerlegung von A durch den ε-Operator

Wir nehmen an, daß die Aktion von Γ auf A linear zu einer Aktion von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ auf A fortgesetzt werden kann. Aufgrund von

$$
\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma \cup \varepsilon\,\Gamma, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) \tag{1.36}
$$

reicht es dann, die Aktion für

$$
T_{-1} =_{\text{def.}} \varepsilon \tag{1.37}
$$

zu betrachten (vgl. [16]).

(1.38) HILFSSATZ. *Für $a \in A$ gelten die folgenden Regeln:*

- $a\Big|\varepsilon\, S = a\Big|S\,\varepsilon$
- $a\Big|\varepsilon\, T = a\Big|T^{-1}\,\varepsilon$
- $a\Big|\varepsilon U\,\varepsilon = a\Big|S\,U^2\,S$
- $a\Big|\varepsilon\, U^2\,\varepsilon = a\Big|S\,U\,S$

Beweis. Sei $\hat{\varepsilon} =_{\text{def.}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Durch einfaches Ausrechnen gewinnen wir $\varepsilon\, S = \hat{\varepsilon} = -\hat{\varepsilon} = S\,\varepsilon$ (-1 operiert trivial auf A) und $\varepsilon\, T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}\,\varepsilon$. Damit folgt $\varepsilon\, U\,\varepsilon = \varepsilon\, T\, S\,\varepsilon = T^{-1}\,\varepsilon\, S\,\varepsilon = T^{-1}\, S\,\varepsilon^2 = T^{-1}\, S = S\,T\,S\,T = S\,T\,S\,T\,(S\,S) = S\,(T\,S\,T\,S)\,S = S\,U^2\,S$. Schließlich erhalten wir $\varepsilon\, U^2\,\varepsilon = \varepsilon\, U\,U\,\varepsilon = \varepsilon\, U\,\varepsilon\,\varepsilon\, U\,\varepsilon = (S\,U^2\,S)\,(S\,U^2\,S) = (S\,U^2)\,S^2\,(U^2) = S\,U^4\,S = S\,U\,S$. (Die letzte Gleichung folgt, da $U^3 = -I$ trivial auf A operiert.) ■

Auf ganz A gilt somit $\varepsilon\, S\,\varepsilon = S$ und $\varepsilon\,(1 + U + U^2)\,\varepsilon = (\varepsilon\,\varepsilon + \varepsilon\, U\,\varepsilon + \varepsilon\, U^2\,\varepsilon) = (S\,S + S\,U^2\,S + S\,U\,S) = S\,(1 + U + U^2)\,S$.

(1.39) KOROLLAR. *$W(A)$ ist ε-invariant.*

Beweis. Sei $a \in W(A) = \ker(1 + S) \cap \ker(1 + U + U^2)$, dann ist $(a\big|\varepsilon)\Big|(1 + S) = a\Big|(1 + S)\,\varepsilon = 0$ und $(a\big|\varepsilon)\Big|(1 + U + U^2) = a\Big|S\,(1 + U + U^2)\,S\,\varepsilon = -a\Big|(1 + U + U^2)\,\hat{\varepsilon} = 0$, wobei wir $a\Big|S = -a$ benutzt haben. ■

(1.40) KOROLLAR. *A_{cc} ist ε-invariant.*

Beweis. Für alle $a \in A$ gilt:

$$a \in A_{cc} \Longleftrightarrow a\Big|\left(T - T^{-1}\right) \in A_c$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow a\Big| \left(T-T^{-1}\right) (S-1) \in A_\omega \\ &\Longleftrightarrow \bigvee_{b\in A} \Big(b\Big| (T-1) = a\Big| \left(T-T^{-1}\right) (S-1)\Big). \end{aligned}$$

Aus den Rechenregeln folgt nun $\left(a\middle|\varepsilon\right)\Big| \left(T-T^{-1}\right) (S-1) = -a\Big| \left(T-T^{-1}\right) (S-1)\,\varepsilon = -b\Big|(T-1)\,\varepsilon = -b\Big|\varepsilon\,(T^{-1}-1) = b\Big|\varepsilon\, T^{-1}(T-1)$, d. h. $a\Big|\varepsilon \in A_{cc}$. ■

Seien A^+ und A^- die beiden Eigenräume von ε zu den Eigenwerten $+1$ und -1. Dann ist $A = A^+ \oplus A^-$. Aufgrund der ε-Invarianz von $W(A)$ und A_{cc} erhalten wir zusätzlich die Zerlegungen $W(A) = W(A)^+ \oplus W(A)^-$ sowie $A_{cc} = A^+_{cc} \oplus A^-_{cc}$. ($V^\pm =_{\text{def.}} V \cap A^\pm$ für jeden Teilraum V von A.)

(1.41) KOROLLAR. *Sei B ein Bernoulli-Operator mit der Eigenschaft*

$$\varepsilon\left(B+\frac{1}{2}\right) = -\left(B+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$$

dann gilt

$$p_B\Big|_{A^\pm_{cc}} : A^\pm_{cc} \longrightarrow W(A)^\pm.$$

Beweis. Aus der Definition des Projektors p_B und obiger Eigenschaft folgt sofort $p_B\,\varepsilon = \varepsilon\, p_B$. Für $a \in A^+_{cc}$ ist $a\Big|\varepsilon = a$, also $\left(a\middle|p_B\right)\Big|\varepsilon = \left(a\middle|\varepsilon\right)\Big|p_B = a\Big|p_B$, d. h. $a\Big|p_B \in A^+ \cap W(A)$. Ist $a \in A^-_{cc}$, so gilt $a\Big|\varepsilon = -a$ und somit $\left(a\middle|p_B\right)\Big|\varepsilon = \left(a\middle|\varepsilon\right)\Big|p_B = -a\Big|p_B$, also $a\Big|p_B \in A^- \cap W(A)$. ■

§5. Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

In diesem Abschnitt wiederholen wir bekannte Resultate aus der Theorie der elliptischen Modulformen. Insbesondere werden wir den wichtigen *Eichler-Shimura-Isomorphismus* für beliebige *Kongruenzuntergruppen* wiedergeben. Mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich, die abstrakte Theorie auf Räume elliptischer Modulformen anzuwenden. Alle Aussagen sind enthalten in z. B.: [8], [7], [14], [29], [24], [31], [11], [15], [12].

Definition. Sei $N \geq 1$ eine positivie natürliche Zahl. Dann heißt

$$\Gamma(N) =_{\text{def.}} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod (N) \right\}$$

Hauptkongruenzuntergruppe des Levels N. Jede Untergruppe Γ' von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ enthält, heißt *Kongruenzuntergruppe.* Das kleinste N nennt man *Level* von Γ'.

Die wichtigsten Kongruenzuntergruppen sind die Gruppen $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$:

$$\Gamma_0(N) =_{\text{def.}} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)\colon c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) =_{\text{def.}} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)\colon a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\},$$

wobei

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) =: \Gamma_1.$$

Es zeigt sich, daß die Sequenz

$$1 \longrightarrow \Gamma(N) \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f} \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{Z}/_{N\,\mathbb{Z}}\right) \longrightarrow 1$$

exakt, also der natürliche Homomorphismus $f\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \pmod{N} & b \pmod{N} \\ c \pmod{N} & d \pmod{N} \end{pmatrix}$ surjektiv, und $\Gamma(N)$, als Kern von f, Normalteiler von Γ_1 ist.

Sei $N = \prod_p p^e$ die Primfaktorzerlegung von N, dann erhalten wir aus dem chinesischen

Restsatz, der Surjektivität von f und wegen

$$\mathrm{SL}\left(2, \mathbb{Z}/_{p^e}\mathbb{Z}\right) = p^{3e}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

die Index-Formel

$$\left[\Gamma_1 : \Gamma(N)\right] = N^3 \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Jede Kongruenzuntergruppe Γ' hat daher ebenfalls endlichen Index in Γ_1, denn $\Gamma(N) \subseteq \Gamma' \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Die Indizes $\left[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)\right]$ und $\left[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)\right]$ können wir leicht aufgrund der Tatsache berechnen, daß die beiden folgenden Abbildungen surjektiv sind und die Kerne $\Gamma(N)$ und $\Gamma_1(N)$ resp. haben:

- $\Gamma_1(N) \longrightarrow \mathbb{Z}/_{N}\mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto b \pmod N,$
- $\Gamma_0(N) \longrightarrow \left(\mathbb{Z}/_{N}\mathbb{Z}\right)^*, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto d \pmod N.$

Wir erhalten

$$\left[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)\right] = N, \quad \left[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)\right] = \phi(N) = N\prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

wobei $\phi(N)$ der Wert der *Eulersche ϕ-Funktion* an der Stelle N ist. Aus den allgemeinen Rechenregeln für Indizes folgt nun sofort:

$$\left[\Gamma_1 : \Gamma_0(N)\right] = N\prod_{p|N}\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Elliptische Modulformen. Sei $\mathscr{H} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \Im(z) > 0\right\}$ die komplexe obere Halbebene und $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ die projektive Gerade über den rationalen Zahlen (*Spitzen*).

Dann operiert Γ_1 auf $\mathscr{H}^* =_{\text{def.}} \mathscr{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ von links via *Möbiustransformationen*, d. h.:

$$\gamma(z) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathfrak{H}^*, \ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1.$$

(Ist $c \neq 0$, dann ist die Zuordnung durch $-\frac{d}{c} \longmapsto \infty$ und $\infty \longmapsto \frac{a}{c}$ gegeben. Im Fall $c = 0$ durch $\infty \longmapsto \infty$. Z. B. gilt $S(0) = \infty$, $S(\infty) = 0$ und $S^{-1}(\infty) = 0$, $S^{-1}(0) = \infty$, wobei $S^{-1} = S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.)

Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ erklärt man eine Rechtsaktion für Funktionen $f \colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ durch:

$$\left(f\Big|_k \gamma\right)(z) =_{\text{def.}} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \cdot (cz+d)^{-k}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1.$$

Definition. Sei Γ' eine Kongruenzuntergruppe und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Eine Funktion $f \colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ heißt *elliptische Modulform* vom *Gewicht* k und Level Γ', falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) f ist holomorph,

(2) $f\Big|_k \gamma = f, \ \forall \gamma \in \Gamma'$,

(3) f ist holomorph in den Spitzen $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Erläuterungen zu (3): Da Γ' eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es eine kleinste positive natürliche Zahl h, so daß $T^h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma'$ gilt. Dabei wirkt T^h als Translation, d. h. $T^h(z) = z + h$. Jede Modulform bezüglich Γ' ist demzufolge $h\,\mathbb{Z}$-periodisch, denn aus der Bedingung (2) folgt $f(z+h) = f(z)$ für alle $z \in \mathscr{H}$. Daher existiert für f die folgende *Fourierreihenentwicklung* in der Spitze $\infty = i\,\infty$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot q_h^n(z), \quad \left(a_n \in \mathbb{C}, \ q_h(z) = e^{\frac{2\pi i z}{h}}\right).$$

Man sagt, daß f holomorph in der Spitze ∞ ist, falls $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt, f verschwindet in der Spitze, falls zusätzlich $a_0 = 0$ erfüllt ist. Ist $\alpha \in \Gamma_1$, so folgt $\left(f\Big|_k \alpha\right)\Big|_k \gamma = f\Big|_k \alpha$ für alle $\gamma \in \alpha^{-1}\Gamma\alpha$. Daher hat auch $f\Big|_k \alpha$, für beliebiges $\alpha \in \Gamma_1$, eine Fourierreihenentwicklung in der Spitze ∞. Man sagt dann, daß f holomorph in den Spitzen $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ist (resp. verschwindet), falls $f\Big|_k \alpha$ holomorph in ∞ ist (resp. verschwindet). Die Menge $\Gamma'\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ der Γ'-inäquivalenten Spitzen ist endlich, da Γ' endlichen Index in Γ_1 hat. Man kann zeigen, daß die Bedingung (3) äquivalent zu folgendem Wachstumsverhalten ist: $\lim_{y \longrightarrow \infty} \left|\left(f\Big|_k \gamma\right)(i\,y)\right| < \infty,\ \forall\,\gamma \in \Gamma_1$. Die Spitzenformen sind genau jene f, für die der Grenzwert verschwindet.

Den endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum aller (elliptischen) Modulformen vom Gewicht k und Level Γ' bezeichnet man mit $\mathscr{M}_k(\Gamma')$. Den Teilraum der Spitzenformen bezeichnet man mit $\mathscr{S}_k(\Gamma')$.

Wie z. B. in [8, Chap. 4] nachzulesen ist, kann man $\mathscr{M}_k(\Gamma')$ in natürlicher Weise in den Raum der Spitzenformen $\mathscr{S}_k(\Gamma')$ und den zugehörigen Quotientenraum der *Eisensteinreihen* $\mathscr{E}_k(\Gamma')$ zerlegen:

$$\mathscr{E}_k(\Gamma') =_{\text{def.}} \mathscr{M}_k(\Gamma') \big/ \mathscr{S}_k(\Gamma')$$

und

$$\mathscr{M}_k(\Gamma') = \mathscr{S}_k(\Gamma') \oplus \mathscr{E}_k(\Gamma').$$

(1.42) *Beispiel.* Für gerades $k \geq 2$ definiert man die *normalisierte Eisensteinreihe* auf $\mathscr{H}$ durch:

$$E_k(z) =_{\text{def.}} \frac{1}{2\,\zeta(k)}\, G_k(z) = 1 - \frac{2\,k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n, \quad \left(q(z) = e^{2\,\pi\, i\, z}\right)$$

($G_k(z) = \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\\ (c,d)\neq(0,0)}} (c\,z + d)^{-k}$, B_k ist die k-te Bernoulli-Zahl, $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ die Riemannsche Zeta-Funktion und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ die Teilersummenfunktion vom Gewicht $k-1$). Dabei ist E_k für jedes gerade $k \geq 4$ eine Modulform vom Gewicht k zur vollen Modulgruppe Γ_1. Dagegen ist E_2 keine Modulform.

(1.43) *Beispiel.* ([8, S. 88] oder [30, Corollary 2.16, S. 18]) Sei $k \geq 4$ eine gerade natürliche Zahl, dann gilt:

$$\mathscr{M}_k(\Gamma_1) = \mathscr{S}_k(\Gamma_1) \oplus \mathbb{C}\, E_k$$

und

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{M}_k(\Gamma_1)\big) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, \text{ falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, \text{ sonst} \end{cases}$$

(also $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma_1)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_k(\Gamma_1)) - 1$). Weiterhin ist $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_0(\Gamma_1)) = 1$ und $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_2(\Gamma_1)) = 0$ sowie $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_0(\Gamma_1)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_2(\Gamma_1)) = 0$.

(1.44) *Beispiel.* ([8, S. 18 und S. 89]) Sei $g = g_0(p)$ das Geschlecht der Modulkurve $X_{\Gamma_0(p)}$, dann gilt:

$$\mathscr{M}_k\big(\Gamma_0(p)\big) = \mathscr{S}_k\big(\Gamma_0(p)\big) \oplus \mathbb{C}\, G_{2,p}, \quad \dim_{\mathbb{C}}\Big(\mathscr{S}_k\big(\Gamma_0(p)\big)\Big) = g.$$

Perioden ([12], [16], [9], [23], [24], [25]). Sei $V = V(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\, X \oplus \mathbb{C}\, Y \subset \mathbb{C}[X, Y]$ der Standard-Rechtsmodul über $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, d. h. $X\big| g = a\,X + b\,Y$ und $Y\big| g = c\,X + d\,Y$ für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ betrachten wir das $w = (k-2)$-fache symmetrische Produkt von V: $V_{k-2} = V_w = V_{k-2}(\mathbb{C}) =_{\text{def.}} \mathrm{Sym}^{k-2}(V)$. Dieses können wir nach [9, Sec. 2.4] mit dem $\mathbb{C}$-Vektorraum der homogenen Polynome des maximalen Grades $i + j = k - 2$ identifizieren, d. h.:

$$V_{k-2} = \bigoplus_{\substack{i,j \geq 0, \\ i+j=k-2}} \mathbb{C}\, X^i\, Y^j,$$

wobei die G-Aktion gegeben ist durch:

$$P(X, Y)\Big|\gamma = P\left(\frac{aX + bY}{cX + dY}\right) \cdot (cX + dY)^{k-2}$$

für $P(X,Y) \in V_{k-2}$, $g \in G$. Die Zuordnung $(X,Y) \longmapsto (X,1)$ beschreibt einen Isomorphismus zwischen homogenen und inhomogenen Polynomen. Daher können wir V_{k-2} auch auffassen als den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome in X mit maximalem Grad $w = k-2$:

$$V_w = V_{k-2} = \bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbb{C}\, X^i$$

und

$$P(X)\Big|g = P\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \cdot (cX+d)^{k-2}$$

für $P(X) = P(X,1) \in V_{k-2}$, $g \in G$.

Sei nun Γ' eine Untergruppe der vollen Modulgruppe Γ_1, die endlichen Index in Γ_1 hat. Wir betrachten V_{k-2} als Γ'-Modul. Sei $V_{k-2}^{\Gamma'}$ der Γ_1-induzierte Modul, dann können wir diesen nach [23, p. 59] auffassen als $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Abbildungen $P\colon \Gamma'\backslash\Gamma_1 \longrightarrow V_w$ mit Γ_1-Aktion: $P\Big|\gamma(\gamma_i) = P(\gamma_i\,\gamma)\Big|\gamma$ für $\gamma_i \in \Gamma'\backslash\Gamma_1$, $\gamma \in \Gamma_1$, wobei o. B. d. A. die Aktion von $-I$ trivial sei (vgl.[24, Sec. 2]). Nach Shapiros Lemma sind dann die parabolischen Cohomologiegruppen $H_p^1(\Gamma', V_{k-2})$ und $H_p^1(\Gamma_1, V_{k-2}^{\Gamma'})$ isomorph zueinander.

Jeder Spitzenform $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma')$ ordnet man wie folgt einen parabolischen 1-Cozyklus $\sigma_f\colon \Gamma_1 \longrightarrow V_{k-2}^{\Gamma'}$ zu:

$$\sigma_f(\gamma)(\gamma_i) =_{\text{def.}} \int_{\gamma^{-1}(i\infty)}^{i\infty} \left(f\Big|_k\gamma_i\right)(z)\,(z-X)^{k-2}\,dz, \quad \left(\gamma_i \in \Gamma'\backslash\Gamma_1,\ \gamma \in \Gamma_1\right).$$

(Wegen $\left(f\Big|_k\gamma_i\right) = f$ für $\gamma_i \in \Gamma'$ ist die Aktion unabhängig von der Wahl der Repräsentanten von $\Gamma'\backslash\Gamma_1$.) Die Abbildung σ_f hat also folgende Eigenschaften:

- $\sigma_f(\gamma\,\delta) = \sigma_f(\gamma) + \sigma_f(\gamma)\Big|\delta, \quad (\gamma, \delta \in \Gamma_1)$,
- $\sigma_f(\pm T^n)$ verschwindet für alle $n \in \mathbb{Z}$, also $[\sigma_f] \in H_p^1(\Gamma_1, V_{k-2}^{\Gamma'})$.

Sei nun $\rho_f =_{\text{def.}} \sigma_f(S) \in V_{k-2}^{\Gamma'}$, dann ist $\rho_f\colon \Gamma'\backslash\Gamma_1 \longrightarrow V_{k-2}$ bestimmt durch die $[\Gamma_1 : \Gamma']$ Polynome

$$\rho_f(\gamma_i) = \int_0^{i\infty} \left(f\Big|_k\gamma_i\right)(z)\,(z-X)^{k-2}\,dz, \quad \left(\gamma_i \in \Gamma'\backslash\Gamma_1\right)$$

(beachte $S^{-1}(i\infty) = 0$). Man nennt ρ_f auch das *mehrfache Periodenpolynom* von f. Jedes ρ_f erfüllt die Periodenrelationen

$$\rho_f\Big|(1+S) = 0, \qquad \rho_f\Big|(1+U+U^2) = 0$$

und ist somit ein Element des $V_{k-2}^{\Gamma'}$-Teilraumes der *Periodenpolynome*

$$W_{k-2}^{\Gamma'} =_{\text{def.}} \Big\{P \in V_{k-2}^{\Gamma'} \colon P\Big|(1+S) = 0,\ P\Big|(1+U+U^2) = 0\Big\}.$$

Setzt man noch

$$C_{k-2}^{\Gamma'} =_{\text{def.}} \Big\{P\Big|(1-S) \colon P \in V_{k-2}^{\Gamma'} \cap \ker(1-T)\Big\} \subset W_{k-2}^{\Gamma'},$$

dann ist $C_{k-2}^{\Gamma'}$ das Bild der 1-Coränder und es gilt insgesamt: $H_p^1(\Gamma_1, V_{k-2}^{\Gamma'}) \cong W_{k-2}^{\Gamma'} \Big/ C_{k-2}^{\Gamma'}$, wobei nach [24, Lemma 4.3, S. 8] $\dim_{\mathbb{C}}\big(C_{k-2}^{\Gamma'}\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathscr{E}_k(\Gamma')\big)$ ist.

Sei nun $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann kann man unter der Aktion von ε den Raum $V_{k-2}^{\Gamma'}$ (resp. $W_{k-2}^{\Gamma'}$) in die zugehörigen ±1-Eigenräume $\big(V_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}$ (resp. $\big(W_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}$) zerlegen. Für $P \in V_{k-2}^{\Gamma'}$ ist dann $P^{\pm} =_{\text{def.}} \frac{1}{2}\Big(P \pm P\Big|\varepsilon\Big) \in \big(V_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}$ und $P^{\pm} \in \big(W_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}$, falls $P \in W_{k-2}^{\Gamma'}$. Auf diese Weise erhält man die beiden Abbildungen $\rho^{\pm} \colon \mathscr{S}_k(\Gamma') \longrightarrow \big(W_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}$, $f \longmapsto \rho_f^{\pm}$.

EICHLER-SHIMURA-ISOMORPHISMUS. ([24, Thm. 2.1]) *Die Abbildungen* $\rho^{\pm} \colon \mathscr{S}_k(\Gamma') \longrightarrow \big(W_w^{\Gamma'}\big)^{\pm}$, $f \longmapsto \rho_f^{\pm}$ *ergeben folgende Isomorphismen von* $\mathbb{C}$*-Vektorräumen (mit derselben Bezeichnung):*

$$\rho^{\pm} \colon \mathscr{S}_k(\Gamma') \longrightarrow \big(W_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm} \Big/ \big(C_{k-2}^{\Gamma'}\big)^{\pm}.$$

Bemerkung. (vgl. [24, Prop. 4.4]) Sei $\Gamma' = \Gamma_0(N)$. Dann gilt $(C_{k-2}^{\Gamma'})^{-} = \{0\} \iff N = 2^e N'$, mit N' ungerade, quadratfrei und $0 \le e \le 3$. Insbesondere ist im Fall $N = 1$ oder $N = p$ (für eine Primzahl p) der Raum $(C_{k-2}^{\Gamma'})^{-}$ trivial $\Big(\dim_{\mathbb{C}}\big((C_{k-2}^{\Gamma'})^{-}\big) = 0\Big)$. Es folgt dann (vgl. auch [24, Sec. 8]):

$$\mathscr{M}_k(\Gamma') \cong \left(W_{k-2}^{\Gamma'}\right)^+, \qquad \mathscr{S}_k(\Gamma') \cong \left(W_{k-2}^{\Gamma'}\right)^-.$$

Beispiel $\Gamma_0(p)$ (vgl. [31, S. 100-102], [6], [30] und [3], [10], [26]. Wir wollen den folgenden coinduzierten $\mathbb{C}[\Gamma_1]$-Rechtsmodul berechnen:

$$M =_{\text{def.}} \operatorname{Coind}_{\Gamma_0(p)}^{\Gamma_1}\Big(V_{k-2}(\mathbb{C})\Big) = \\ = \Big\{ f : \Gamma_1 \longrightarrow V_{k-2}(\mathbb{C}) : f(\gamma\,\delta) = f(\gamma)\Big|\delta,\ \forall\,\gamma \in \Gamma_1,\ \forall\,\delta \in \Gamma_0(p) \Big\}.$$

Die Γ_1-Rechtsaktion ist dabei gegeben durch:

$$\Big(f\Big|\gamma\Big)(\delta) =_{\text{def.}} f(\gamma\,\delta), \quad \gamma,\,\delta \in \Gamma_1.$$

Da $\Gamma_0(p)$ den endlichen Index $p+1$ in Γ_1 hat, ist M isomorph zum *induzierten* $\mathbb{C}[\Gamma_1]$-*Rechtsmodul*:

$$W =_{\text{def.}} \operatorname{Ind}_{\Gamma_0(p)}^{\Gamma_1}\Big(V_{k-2}(\mathbb{C})\Big) =_{\text{def.}} V_{k-2}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \mathbb{C}[\Gamma_1]$$

mit der Γ_1-Rechtsaktion

$$\Big(v \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \gamma\Big)\Big|\delta =_{\text{def.}} v \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \gamma\,\delta, \qquad v \in V_{k-2}(\mathbb{C}),\ \gamma,\,\delta \in \Gamma_1.$$

Ist $\{\gamma_i\}_{i=0}^{p} \subseteq \Gamma_1$ ein vollständiges Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $\Gamma_0(p)\backslash\Gamma_1$, dann kann man jedes Element aus $\mathbb{C}[\Gamma_1]$ eindeutig darstellen in der Form $\sum_{i=0}^{p} \delta_i\,\gamma_i$, mit $\delta_i \in \mathbb{C}[\Gamma_0(p)]$. Wir erhalten auf diese Weise eine Zerlegung $\mathbb{C}[\Gamma_1] = \bigoplus_{i=0}^{p} \mathbb{C}[\Gamma_0(p)]\,\gamma_i$ in $\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]$-Linksmoduln. Aus den Eigenschaften des Tensorproduktes (Distributivgesetz und $v \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \delta\, \gamma_i = v\Big|\delta \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \gamma_i$ für $\delta \in \mathbb{C}[\Gamma_0(p)])$ folgt dann:

$$W \cong \bigoplus_{i=0}^{p} \Big(V_{k-2}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}[\Gamma_0(p)]} \mathbb{C}\left[\Gamma_0(p)\right] \gamma_i \Big) \cong \bigoplus_{i=0}^{p} \Big(V_{k-2}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\, \gamma_i \Big).$$

Ein vollständiges Vertretersystem von $\Gamma_0(p)\backslash\Gamma_1$ ist z. B. durch die Menge

$$\left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Nach [6, Prop. 2.2.2 (S. 16)] ist die folgende Zuordnung eine Bijektion:

$$\{\gamma_i\}_{i=0}^{p} \longleftrightarrow \mathbb{P}^1\left(\mathbb{F}_p\right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow (c:d).$$

(Die ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ werden dabei so ergänzt, daß $ad - bc = 1$ erfüllt ist.)

Die Γ_1-Rechtsaktion auf dem Vertretersystem von $\Gamma_0(p)\backslash\Gamma_1$ induziert eine Γ_1-Rechtsaktion $\Big|_1$ auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$:

$$(c:d)\Big|_1 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} =_{\text{def.}} (c:d) \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (cp + dr : cq + ds) \tag{1.45}$$

für $(c:d) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$.

Alternativ zur Aktion 1.45 können wir auch die folgende Γ_1-Rechtsaktion auf $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{F}_p\right)$ betrachten:

$$(c:d)\Big|_2 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} =_{\text{def.}} (c:d)\Big|_1 \left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} \right)^t = (c:d)\Big|_1 \begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

für $(c:d) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$.

Bemerkung. Allgemein gilt: Ist $a\Big|_1 g$ eine Γ_1-Rechtsaktion, dann definiert

$$a\Big|_2 g =_{\text{def.}} a\Big|_1 (g^{-1})^t$$

eine weitere Γ_1-Rechtsaktion, denn $(a\Big|_2 g)\Big|_2 h = (a\Big|_1 (g^{-1})^t)\Big|_2 h = a\big|_1 (g^{-1})^t\,(h^{-1})^t = a\Big|_1 (h^{-1}\,g^{-1})^t = a\Big|_1 ((g\,h)^{-1})^t = a\Big|_2 (gh)$.

SATZ. *Die Aktionen 1.45 und 1.46 sind Γ_1-isomorph, wobei ein entsprechender Γ_1-Isomorphismus durch die Aktion der Matrix S induziert wird:*

$$\chi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), \quad (c:d) \longmapsto (c:d)\Big|_2 S.$$

Beweis. Es gilt: $(c:d)\Big|_2 S = (c:d)\Big|_1 \left(S^{-1}\right)^t = (c:d)\Big|_1 S = (d:-c)$, also ist $\chi\big((c:d)\big)\Big|_2 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (d:-c)\Big|_2 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (d:-c)\Big|_1 \left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1}\right)^t = (d:-c)\cdot\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} = (ds+cq : -dr-cp)$, was mit $\chi\big((c:d)\big)\Big|_1 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \chi\big((cp+dr : cq+ds)\big) = (cq+ds : -cp-dr)$ übereinstimmt. ■

(1.47) *Bemerkung.* Im Fall $k=2$ ist $V_{k-2}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ und daher gilt für jede der beiden Aktionen 1.45 oder 1.46:

$$M \cong_{\Gamma_1} W \cong_{\Gamma_1} \bigoplus_{i=0}^{p} \mathbb{C}\,\gamma_i \cong_{\Gamma_1} \mathbb{C}\left[\mathbb{P}^1\left(\mathbb{F}_p\right)\right].$$

Kapitel 2:

Beispiel Level $\Gamma(1)$ und geraades Gewicht $k > 2$

Sei K ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(K) = 0$, $k > 2$ eine gerade natürliche Zahl und A der $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$-Rechtsmodul aller K-Polynome maximaler Ordnung $w = k-2$, wobei die Aktion von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ durch

$$p(X)\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =_{\text{def.}} p\left(\frac{a\,X+b}{c\,X+d}\right)\;(c\,X+d)^{k-2}$$

$\left(p \in A,\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\right)$ gegeben ist (vgl. [12], [16], [17]). Dann ist $\dim_K(A) = k-1$, und die Menge der Monome $\left\{1, X, \ldots, X^{k-2}\right\}$ bildet eine K-Basis von A, d. h. es gilt $A = \bigoplus_{j=0}^{w} K \cdot X^j$ und

$$X^j\Big|\gamma = (a\,X+b)^j\;(c\,X+d)^{w-j}$$

$(j = 0, \ldots, w = k-2)$, so daß $X^j\Big|\gamma$ höchstens den Grad $j + (w-j) = w$ hat, was die Wohldefiniertheit der Aktion zeigt. Für $j = 0$, beispielsweise, erhalten wir so $X^0\Big|\gamma = (c\,X+d)^w$.

Wir werden nun die Räume A_α, A_ω, A_c und A_{cc} explizit beschreiben. Für beliebiges $p(X) = \sum_{j=0}^{w} c_j\,X^j \in A$ ist $p(X)\Big|\gamma = \sum_{j=0}^{w} c_j\;(a\,X+b)^j\,(c\,X+d)^{w-j}$. Es folgt $p(X)\Big|T = p(X+1) = c_0 + c_1\;(X+1)^1 + \cdots + c_\omega\;(X+1)^w$ und daraus $q(X) =_{\text{def.}} p(X)\Big|(T-1) = c_1\left((X+1)^1 - X^1\right) + \sum_{j=2}^{w} c_j\left((X+1)^j - X^j\right)$. Da jeder der Summanden $(X+1)^j - X^j$

Grad $j-1$ hat, hat $q(X)$ maximalen Grad $w-1=k-3$. Wegen $\operatorname{char}(K)=0$ ist jedes von 0 verschiedene Element, insbesondere jeder Binomialkoeffizient, in K invertierbar. Es folgt $q(X)=p(X+1)-p(X)=0$ genau dann, wenn c_0 beliebig ist und $c_j=0$ für $j>0$ gilt. Mit der gleichen Begründung können wir jedes Polynom q vom Grad $\leq k-3$ durch die Aktion des Operators $T-1$ auf ein geeignet zu wählendes Polynom p aus A gewinnen. Wir haben damit

$$A_\alpha = \ker(T-1) = K \cdot X^0$$

und

$$A_\omega = \operatorname{im}(T-1) = \bigoplus_{j=0}^{w-1} K \cdot X^j$$

gezeigt.

Zur Berechnung von A_c und A_{cc} müssen wir die Aktion von $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ genauer untersuchen. Wir benutzen

$$\operatorname{coeff}_j\big(p(X)\big) =_{\text{def.}} c_j, \quad (0 \leq j \leq w = k-2,\, p(X) \in A)\,.$$

Sei $q^*(X) =_{\text{def.}} p(X)\Big|(S-1)$, dann gilt $X^j \overset{S}{\longmapsto} (-1)^j \cdot X^{w-j}$ und damit

$$\begin{aligned} q^*(X) &= \sum_{k=0}^{w} c_k(-1)^k X^{w-k} - \sum_{j=0}^{w} c_j X^j \\ &= \sum_{j=0}^{w} c_{w-j}(-1)^{w-j} X^j - \sum_{j=0}^{w} c_j X^j \\ &= \sum_{j=0}^{w} \left((-1)^{w-j} c_{w-j} - c_j\right) X^j. \end{aligned}$$

Für die Umformung haben wir die Indextransformation $j=w-k$ bzw. $k=w-j$ für $j=w,\ldots,0$ benutzt. Es folgt, da w gerade ist, $q^*(X) \in A_w \Longleftrightarrow \operatorname{coeff}_w\left(q^*(X)\right)=0 \Longleftrightarrow$

$c_w = c_0$, d. h.

$$A_c = \{p(X) \in A\colon c_0 = c_w\}.$$

Um den Raum A_{cc} zu bestimmen, betrachten wir außerdem die Aktion von $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $q^{**}(X) =_{\text{def.}} p(X)\Big| \left(T - T^{-1}\right)$, c_0^{**} der Koeffizient in $q^{**}(X)$ von X^0 und c_w^{**} der Koeffizient von X^w in $q^{**}(X)$. Wegen $X^j \overset{T^{-1}}{\longmapsto} (X-1)^j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} q^{**}(X) &= \sum_{j=0}^{w} c_j \left((X+1)^j - (X-1)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{w} c_j \left(\sum_{i=0}^{j} \left(\binom{j}{i} - (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right) X^i \right) \end{aligned}$$

und durch anschließendes Aufsammeln der Koeffizienten von X^0 und X^w die Gleichungen:

$$c_0^{**} = \sum_{j=0}^{w} c_j \left(\binom{j}{0} - (-1)^j \binom{j}{0} \right), \quad c_w^{**} = c_w \left(\binom{w}{w} - (-1)^{w-w} \binom{w}{w} \right) = 0.$$

Daher ist die Bedingung $c_0^{**} = c_w^{**}$ genau dann erfüllt, wenn $c_0^{**} = 2 \sum\limits_{\substack{j=0, \\ j \text{ ungerade}}}^{w} c_j = 0$ gilt (für gerade j verschwinden die Summanden für beliebige c_j), also

$$A_{cc} = \Big\{p(X) \in A\colon \sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ ungerade}}}^{w} c_j = 0\Big\}. \tag{2.1}$$

Bernoulli-Operatoren. Nachdem wir nun die im theoretischen Teil motivierten Räume A_α, A_ω, A_c und A_{cc} konkret bestimmt haben, werden wir im nächsten Schritt einen passenden *Bernoulli-Operator* auf A_ω angeben. Es zeigt sich, daß die klassischen Bernoulli-Polynome die geeigneten Kandidaten sind, um einen Bernoulli-Operator zu finden. Die Definition und die für unsere Betrachtungen benötigten Eigenschaften der Bernoulli-Polynome und -Zahlen findet man etwa in [18, S. 218-220], [2, S. 382-389], [21, S. 447 ff., S. 453 ff.], [5, S. 107-109] und [1, S. 264 ff.]

Definition. Unter dem j-ten *Bernoulli-Polynom* $B_j(X)$ versteht man den durch $j\,! = 1 \cdot \ldots \cdot j$ (Fakultät) normierten j-ten Koeffizienten der formalen Potenzreihenentwicklung der erzeugenden Funktion $F(t, X)$:

$$F(t, X) =_{\text{def.}} \frac{t \cdot e^{t \cdot X}}{e^t - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(X) \cdot \frac{t^j}{j!}.$$

Der konstante Anteil des j-ten Bernoulli-Polynoms, also $B_j =_{\text{def.}} B_j(0)$, heißt j-te *Bernoulli-Zahl.*

Wir fassen nun die wichtigsten Rechenregeln zusammen:

SATZ.

(1) $B_j(X) = \sum\limits_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B_i X^{j-i}$,

(2) $B_0(X+1) - B_0(X) = 0$,

(3) $B_j(X+1) - B_j(X) = j \cdot X^{j-1}$ *für* $j \geq 1$,

(4) $B_{2j+1} = 0$ *für* $j \geq 1$,

(5) $\sum\limits_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{1}{i+1} B_{i+1} = -\frac{1}{j+1}$ *für* $j \geq 1$.

(6) Die Bernoullizahlen sind rationale Zahlen.

Beweis. Aussagen (1)-(4) werden in [1, S. 264 ff.] gezeigt. Betrachtet man (3) an der Stelle $X = 0$, so erhält man für $j \geq 2$ die Gleichungen $B_j(1) = B_j(0)$ sowie $B_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B_i$, wobei man noch $X = 1$ in (1) einsetzen muß. Die Werte B_j kann man dabei kürzen, so daß wir die Rekursionsformel

$$B_0 = 1, \quad \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} B_i = 0, \quad (j \geq 1)$$

ablesen können. Daraus folgt (5), denn $\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{1}{i+1} B_{i+1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j+1}{i+1} \frac{1}{j+1} B_{i+1} = \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j+1}{i+1} \frac{1}{j+1} B_{i+1} = \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{k=1}^{j} \binom{j+1}{l} B_k = \frac{1}{j+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j+1}{l} - B_0 \right) = -\frac{1}{j+1}$ für $j \geq 1$. Aussage (6) ist ebenfalls eine Konsequenz aus der Rekursionsformel. ∎

Bemerkung. Man beachte den Hinweis in [21, S. 447-448] zu einer abweichenden Definition der Bernoulli-Polynome. Diese führt aber lediglich zu einem Wechsel des Vorzeichens der Bernoulli-Zahl $B_1 = -\frac{1}{2}$.

(2.2) PROPOSITION. *Die Bernoulli-Polynome $B_0(X), \ldots, B_n(X)$ ($n \geq 0$) bilden eine Basis des K-Vektorraums $\bigoplus_{j=0}^{n} K \cdot X^j$.*

Beweis. Für $j \geq 0$ hat das j-te Bernoulli-Polynom $B_j(X)$ den Grad j, wobei der Koeffizient von X^j identisch 1 ist. ■

Wir können nun einen Bernoulli-Operator für A angeben.

(2.3) *Definition.* Der Bernoulli-Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ sei definiert als die lineare Fortsetzung der Rechtsaktion

$$X^j \Big| B =_{\text{def.}} \frac{1}{j+1} B_{j+1}(X), \quad 0 \leq j \leq w-1.$$

Daß der Operator wohldefiniert ist, also Definition 1.24 erfüllt, folgt leicht aus den aufgeführten Rechenregeln der Bernoulli-Polynome, denn:

$$\begin{aligned} X^j \Big| B\,(T-1) &= \tfrac{1}{j+1} B_{j+1}(X) \Big| (T-1) \\ &= \frac{1}{j+1}\left(B_{j+1}(X+1) - B_{j+1}(X)\right) \\ &= \frac{1}{j+1}(j+1)X^j \\ &= X^j. \end{aligned}$$

Wir werden nun die Aktion des Operators $\lambda_B\colon A \longrightarrow A_\alpha$ explizit bestimmen. Dazu sei $p(X)$ aus A beliebig gegeben. Wie wir bereits gezeigt haben, können wir $p(X)$ als Linearkombination der Bernoulli-Polynome $B_0(X), \ldots, B_w(X)$ darstellen, d. h.

$$p(X) = c_0^*\, B_0(X) + \cdots + c_w^*\, B_w(X), \quad (c_j^* \in K).$$

Diese Darstellung ist von Vorteil, da auf den Bernoulli-Polynomen die Aktion des Operators $(T-1)\,B$ im Wesentlichen trivial ist, es gilt nämlich $B_0(X)\Big|(T-1)\,B = 0$ und im Fall $j > 0$:

$$\begin{aligned} B_j(X)\Big|(T-1)\,B &= \big(B_j(X+1) - B_j(X)\big)\Big|B \\ &= j\,X^{j-1}\Big|B \\ &= j \cdot \frac{1}{j}\,B_j(X) \\ &= B_j(X). \end{aligned}$$

Daraus folgt $p(X) \overset{(T-1)\,B}{\longmapsto} c_0^*\,0 + c_1^*\,B_1(X) + \cdots + c_w^*\,B_w(X) = p(X) - c_0^* B_0(X) = p(X) + \lambda(p)$ für eine Konstante $\lambda(p)$ aus K, die nur von $p(X)$ abhängt. Insbesondere ist $p^*(X) =_{\text{def.}} X^j\Big|(T-1)\,B = X^j + \lambda(p^*)$ für jedes $j \geq 0$. Andererseits rechnet man leicht nach, daß für $j \geq 1$

$$X^j\Big|(T-1)\,B = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \frac{1}{k+1}\,B_{k+1}(X)$$

und somit (vgl. Rechenregeln)

$$\lambda(p^*) = p^*(0) = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \frac{1}{k+1}\,B_{k+1} = -\frac{1}{j+1}$$

gilt. Da der Homomorphismus λ_B durch Eigenschaft $(T-1)\,B = 1 + \lambda_B$ eindeutig charakterisiert ist, können wir wegen $X^j\Big|(1+\lambda_B) = X^j + X^j\Big|\lambda_B$ und durch einen Koeffizientenvergleich $X^j\Big|\lambda_B = \lambda(p^*) = -\frac{1}{j+1} \in K$ für $j \geq 0$ ablesen. (Die Gleichung stimmt auch für $j = 0$, was man wegen $0 = X^0\Big|(T-1)\,B = X^0\Big|(1+\lambda_B) = 1 + X^0\Big|\lambda_B$ sieht.)

Da außerdem $X^j\Big|S = (-1)^j\,X^{w-j}$ für jedes $j \geq 0$ gilt, folgt $k \cdot X^0\Big|(S-1) = k \cdot$

$\left(X^{k-2}-1\right)$ für alle $k \in K$. Daher ist das Bild von A_{cc} unter dem p_B-Fehlerterm

$$e_B =_{\text{def.}} -2\,\left(1+T^{-1}\right)\,\lambda_B\,(S-1)$$

der Teilraum $K \cdot \left(X^{k-2}-1\right)$. Dieser Teilraum ist in $W(A)$ enthalten, denn für gerades w gilt $(X^w-1)\Big|(1+S) = X^w - 1 + (-1)^w\,X^{w-w} - X^w = 0$ und $(X^w-1)\Big|(1+U+U^2) = X^w - 1 + ((X-1)^w - X^w) + ((-1)^w - (X-1)^w) = 0$, wobei wir $X^j\Big|U = X^j\Big|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (X-1)^j\,X^{w-j}$ und $X^j\Big|U^2 = X^j\Big|\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^j\,(X-1)^{w-j}$ für $j \geq 0$ benutzt haben. Nach 1.35 operiert p_B auf $X^{k-2}-1$ durch

$$(X^{k-2}-1)\Big|p_B = 6 \cdot (X^{k-2}-1) + (X^{k-2}-1)\Big|e_B.$$

Wir werden nun p_B und e_B explizit bestimmen.

(2.4) LEMMA. *Für jede gerade natürliche Zahl $w = k-2 \geq 0$ gilt:*

$$(X^{k-2}-1)\Big|p_B = \frac{2k+2}{k-1} \cdot \left(X^{k-2}-1\right).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir für $w \geq 0$ die Identität $\sum_{j=0}^{w}(-1)^{w-j}\binom{w}{j}\,\frac{w+1}{j+1} = 1$. Wegen der Symmetrie der Binomilakoeffizienten, $\binom{w}{j} = \binom{w}{w-j}$, verschwindet deren Wechselsumme, d. h. $\sum_{j=0}^{w}(-1)^{w-j}\binom{w}{j} = 0$.

Aufgrund von

$$\binom{w}{j} \cdot \frac{w+1}{j+1} = \frac{w!\,(w+1)}{(w-j)!\,j!\,(j+1)} = \frac{(w+1)!}{\big((w+1)-(j+1)\big)\,(j+1)!} = \binom{w+1}{j+1}$$

und der Substitution $k = j+1$ folgt

$$\sum_{j=0}^{w}(-1)^{w-j}\binom{w+1}{j+1} = \sum_{k=1}^{w+1}(-1)^{w-(k-1)}\binom{w+1}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{w+1} (-1)^{w-k+1} \binom{w+1}{k} \\
&= -\sum_{k=1}^{w+1} (-1)^{w-k} \binom{w+1}{k} \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{w+1} (-1)^{w-k} \binom{w+1}{k} + 1 - 1 \right) \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{w+1} (-1)^{w-k} \binom{w+1}{k} - 1 \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(X^w - 1)\Big| \left(1 + T^{-1}\right) \lambda_B = \left(X^w - 1 + (X-1)^w - 1\right)\Big|\lambda_B = \\
&= -\frac{1}{w+1} + 1 + 1 + \sum_{j=0}^{w} (-1)^{w-j} \binom{w}{j} \left(-\frac{1}{j+1}\right) \\
&= \frac{2w+1}{w+1} - \sum_{j=0}^{w} (-1)^{w-j} \binom{w}{j} \frac{1}{j+1} \\
&= \left(2w + 1 - \sum_{j=0}^{w} (-1)^{w-j} \binom{w}{j} \frac{w+1}{j+1} \right) \cdot (w+1)^{-1} \\
&= \frac{2w}{w+1}.
\end{aligned}
$$

Die Aktion von $S-1$ auf $\frac{2w}{w+1}$ liefert $\frac{2w}{w+1}\ (X^w-1)$. Multipliziert man anschließend noch mit -2, so erhält man das Bild von (X^w-1) unter der Aktion von e_B:

$$
(X^w - 1)\Big|e_B = -\frac{4w}{w+1}\ (X^w - 1)\,.
$$

Schließlich folgt die Aussage des Satzes, d. h. der Wert der Aktion von p_B, durch Addition von $\frac{6w+6}{w+1}\ (X^w-1)$, was $\frac{2w+6}{w+1}\ (X^w-1) = \frac{2k+2}{k-1}\ \left(X^{k-2}-1\right)$ ergibt. ■

Bemerkung. Wegen $X^j\big|\varepsilon = (-1)^j\, X^j$ für $j \geq 0$ kann man jedes Polynom $p(X)$ aus A

durch $p^{\pm}(X) =_{\text{def.}} \frac{1}{2} \cdot \left(p(X) + p(X)\Big|\varepsilon\right)$ in seinen geraden Anteil $p^{+}(X) \in A^{+}$ und seinen ungeraden Anteil $p^{-}(X) \in A^{-}$ zerlegen.

LEMMA. *Für alle $j \geq 0$ gilt $X^j\Big|\left(B + \frac{1}{2}\right) \in A^{\pm} \iff j$ ungerade (A^+-Fall), gerade (A^--Fall).*

Beweis. Wir benutzen die folgende Darstellung des j-ten Bernoulli-Polynoms: $B_j(X) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} b_{j-k}\, X^k$, wobei $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$ und $b_m = 0$ für ungerades $m > 1$ gilt. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
X^j\Big|\left(B + \tfrac{1}{2}\right) &= \frac{1}{j+1}\, B_{j+1}(X) + \frac{1}{2}\, X^j \\
&= \sum_{k=0}^{j+1} \frac{\binom{j+1}{k}\, b_{j+1-k}\, X^k}{j+1} + \frac{1}{2}\, X^j \\
&= \frac{1}{j+1}\, b_0\, X^{j+1} - \frac{j+1}{j+1} \cdot \frac{1}{2}\, X^j + \frac{1}{2}\, X^j + r(X) \\
&= \frac{1}{j+1}\, X^{j+1} + r(X).
\end{aligned}
$$

Dabei ist $r(X)$ ein gerades Polynom (mit maximalem Grad $j-1$) genau dann, wenn j ungerade ist. Genauso ist X^{j+1} genau dann gerade, wenn j ungerade ist. ■

KOROLLAR. *Es gilt $\varepsilon\left(B + \frac{1}{2}\right) = -\left(B + \frac{1}{2}\right)\varepsilon$.*

Beweis. Die Aktion von ε auf A ist gegeben durch $X^j\Big|\varepsilon = (-1)^j\, X^j$. Für gerades j folgt dann $X\Big|\varepsilon\ \left(B + \frac{1}{2}\right) = X^j\Big|\left(B + \frac{1}{2}\right) = \frac{X^{j+1}}{j+1} + r(X)$, wobei $r(X) \in A^-$. Andererseits ist $X^j\Big| - \left(B + \frac{1}{2}\right)\varepsilon = -\left(\frac{X^{j+1}}{j+1} + r(X)\right)\Big|\varepsilon = -\left(-\frac{X^{j+1}}{j+1} - r(X)\right) = \frac{X^{j+1}}{j+1} + r(X)$. Sei nun j ungerade, dann erhält man auf analoge Weise $X^j\Big|\varepsilon\ \left(B + \frac{1}{2}\right) = -\left(X^j\Big|\left(B + \frac{1}{2}\right)\right) = -\left(\frac{X^{j+1}}{j+1} + r^*(X)\right)$, wobei $r^*(X) \in A^+$ sowie $X^j\Big| - \left(B + \frac{1}{2}\right)\varepsilon = -\left(\frac{X^{j+1}}{j+1} + r^*(X)\right)\Big|\varepsilon = -\left(\frac{X^{j+1}}{j+1} + r^*(X)\right)$, da ε auf geraden Polynomen trivial operiert. ■

KOROLLAR. *Für gerades $w = k - 2 \geq 0$ ist die Einschränkung von p_B auf $W(A)^-$ gegeben durch:*

$$p_B^- = p_B\big|_{W(A)^-} = 6 \cdot \mathrm{Id}_{W(A)^-}.$$

Beweis. Aufgrund des Korollars gilt $p_B^-(A_{cc}^-) \subseteq W(A)^-$. Andererseits gilt $e_B(A_{cc}) \subseteq K \cdot (X^w - 1) \subseteq W(A)^+$. Aus der Zerlegung $p_B\big|_{W(A)} = 6 \cdot \mathrm{Id}_{W(A)} + e_B$ folgt, daß e_B auf $W(A)^-$ verschwindet. Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Kapitel 3:

Beispiel Level $\Gamma_0(p)$ und Gewicht $k = 2$

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $A = K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)]$ für eine Primzahl $p > 3$ ($\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$). Die Aktion von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma \cup \varepsilon\,\Gamma$ ($\Gamma = \Gamma_1$) auf A sei definiert als die lineare Fortsetzung der Aktion auf der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$, gegeben durch:

$$(\alpha:\beta)\Big|\gamma =_{\text{def.}} \left(\gamma^\iota \cdot (\alpha,\beta)^t\right)^t$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ ($(\alpha,\beta) \neq (0,0)$), $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ und $\gamma^\iota = \mathrm{adj}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (*Adjunkte*). Da γ invertierbar ist, folgt $\gamma^\iota = \det(\gamma)\cdot\gamma^{-1}$. Wegen $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und $\varepsilon^\iota = \det(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ gilt daher (vgl. Kapitel 1):

$$(\alpha:\beta)\Big|\gamma = (d\,\alpha - b\,\beta : -c\,\alpha + a\,\beta).$$

Bemerkung. ([13, Lemma 1, S. 285]) Die Aktion von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ faktorisiert über $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_p)$.

Für die Elemente $\overline{j} = j \,(\mathrm{mod})\, p$ aus $\mathbb{F}_p$ schreiben wir im Folgenden kurz j. Dann hat jedes Element (Äquivalenzklasse) des projektiven Raumes $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ die Gestalt

$$[j] =_{\text{def.}} (j:1), \quad j = 0, 1, \ldots, p-1$$

oder

$$[\infty] =_{\text{def.}} (1:0).$$

Die Gesamtheit dieser Elemente bildet eine K-Basis von A, so daß

$$A = \bigoplus_{j \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}} K\,[j], \quad \dim_K(A) = p + 1$$

gilt.

Die Elemente D aus A nennt man auch *Divisoren.* Jeder Divisor D kann daher eindeutig als Linearkombination der Form

$$D = \sum_{j \in \mathbb{F}_p} c_j\,[j] + c_\infty\,[\infty], \quad (c_j,\, c_\infty \in K)$$

geschrieben werden. Zum Beispiel ist der Nulldivisor 0 durch $0 = 0 \cdot [0] + 0 \cdot [1] + \cdots + 0 \cdot [p-1] + 0 \cdot [\infty]$ gegeben.

Die Aktionen von T, S und ε sind gegeben durch:

- $[j]\Big|T = (j-1:1) = [j-1], \quad (j \in \mathbb{F}_p),$
- $[\infty]\Big|T = (1:0) = [\infty],$
- $[j]\Big|\varepsilon = (j:-1) = [-j] = [p-j], \quad (j \in \mathbb{F}_p)$
- $[\infty]\Big|\varepsilon = (1:0) = [\infty],$
- $[j]\Big|S = (1:-j) = \begin{cases} (-j^{-1}:1) = [-j^{-1}], & (j \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}), \\ [\infty], & (j = 0), \end{cases}$
- $[\infty]\Big|S = (1,-j) = (0:-1) = (0:1) = [0].$

Die Aktion von T ist ein Spezialfall der Aktion der Operatoren $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{Z})$:

- $[j]\Big|\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (j-n:1) = [j-n], \quad (j \in \mathbb{F}_p),$
- $[\infty]\Big|\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1:0) = [\infty].$

Wir wollen nun die Aktion von U auf A betrachten.

LEMMA. *Für die Aktion des Operators $U = T\,S$ gilt:*

(i) $[0]\Big|U = [1]$, $[1]\Big|U = [\infty]$ *und* $[\infty]\Big|U = [0]$,

(ii) $U\colon \big\{[j]\colon j \in \mathbb{F}_p^* \setminus \{1\}\big\} \longrightarrow \big\{[j]\colon j \in \mathbb{F}_p^* \setminus \{1\}\big\}$, *wobei die Aktion explizit durch* $[j]\Big|U = [(1-j)^{-1}]$ *gegeben ist.*

Beweis. (i): Für jede Primzahl p ist $p-1$ selbstinvers, denn $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \pmod p$. Die Elemente 1 und $p-1$ sind die einzigen selbstinversen Elemente von F_p^*, denn es gibt maximal zwei Lösungen von $X^2 - 1$ im Körper F_p^*. Es folgt $[0]\Big|TS = [p-1]\Big|S = [-(p-1)^{-1}] = [p-(p-1)] = [1]$ sowie $[1]\Big|TS = [0]\Big|S = [\infty]$ und $[\infty]\Big|TS = [\infty]\Big|S = [0]$. (ii) : Wegen $T\left(\big\{[j]\colon j \in \mathbb{F}_p^* \setminus \{1\}\big\}\right) = \{[1], \ldots, [p-2]\}$ und der Injektivität der Inversenbildung erhält man sofort die Behauptung, denn $S\left(\{[1], \ldots, [p-2]\}\right) = \big\{[p-\hat{p}]\colon \hat{p} \in \mathbb{F}_p^* \setminus \{p-1\}\big\} = \big\{[j]\colon j \in \mathbb{F}_p^* \setminus \{1\}\big\}$. Die Aktion von U erhält man direkt aus der Definiton:

$$\begin{aligned} [j]\Big|U &= [j]\Big|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0 \cdot j + 1, -1 \cdot j + 1 \cdot 1) \\ &= (1, -j+1) \\ &= \left((1-j)^{-1}, 1\right) \\ &= [(1-j)^{-1}]. \end{aligned}$$

■

KOROLLAR. *Für jedes $D \in W(A)$ gilt $c_0 = -c_\infty$ und $c_1 = 0$.*

Beweis. Aus den Rechenregeln für die Aktion von U folgen die Gleichungen

$$D\Big|(1+S) = (c_0 - c_\infty)\,([0]+[\infty]) + \cdots$$

und

$$D\Big|(1+U+U^2) = (c_0 + c_1 + c_\infty)\,([0]+[1]+[\infty]) + \cdots$$

Damit die Periodenrelationen $D\Big|(1+S) = 0$ und $D\Big|(1+U+U^2) = 0$ erfüllt sind, müssen demnach $c_0 + c_\infty = 0$ und $c_0 + c_1 + c_\infty = 0$ gelten, was äquivalent zur Behauptung $c_0 = -c_\infty$ und $c_1 = 0$ ist. ∎

Definition. Für jedes $j \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ heißt die Abbildung

$$\mathrm{ord}_j\colon A \longrightarrow K, \quad D \longmapsto c_j$$

Ordnung an der Stelle j. Die Abbildung

$$\deg\colon A \longrightarrow K, \quad D \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)} \mathrm{ord}_j(D)$$

nennt man *Grad.*

(Aus der Definition folgt sofort, daß die Abbildungen ord_j, und damit auch die Abbildung deg, K-linear ist.)

Eine ausgezeichnete Rolle spielt der (endliche) Divisor

$$D_f =_{\text{def.}} \sum_{j\in\mathbb{F}_p} [j], \quad \deg(\mathrm{D_f}) = \#\mathbb{F}_p = p \in K.$$

Wir können nun die Räume A_α, A_ω, A_c und A_{cc} berechnen.

LEMMA. *Es gilt*

$$A_\alpha = K \cdot D_f \oplus K \cdot [\infty]$$

und

$$A_\omega = \Big\{D \in A \colon \deg(D) = 0,\, \mathrm{ord}_\infty(D) = 0\Big\}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Berechnung von $A_\alpha = \ker(T-1)$. Für beliebiges $D = \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j] + c_\infty\,[\infty] \in A$ ist $D\Big|T = \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j-1] + c_\infty\,[\infty] = c_0\,[-1] + \sum_{j=1}^{p-1} c_j\,[j-1] + c_\infty\,[\infty] = c_0\,[p-1] + \sum_{j=0}^{p-2} c_{j+1}\,[j] + c_\infty\,[\infty]$. Es folgt $D^* =_{\text{def.}} D\Big|(T-1) = (c_0 - c_{p-1})\,[p-1] + \sum_{j=0}^{p-2}(c_{j+1} - c_j)\,[j]$ und daraus die Behauptung, denn $D\Big|(T-1) = 0 \iff c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} \in K$ und beliebiges $c_\infty \in K$.

Um $A_\omega = \mathrm{im}(T-1)$ zu berechnen, betrachten wir die Koeffizienten von D^*. Diese sind eindeutig charakterisiert durch $c*_\infty = 0$ und

$$\begin{aligned} c^*_{p-1} &= c_0 - c_{p-1} \\ c^*_{p-2} &= c_{p-1} - c_{p-2} \\ &\ldots \\ c^*_0 &= c_1 - c_0, \end{aligned}$$

was äquivalent zu $\mathrm{ord}_\infty(D^*) = 0$ und $\sum_{j=0}^{p-1} c^*_j = \deg(D^*) = 0$ (Teleskopsumme) ist. ∎

LEMMA. *Es gilt*

$$A_c = \Big\{D \in A \colon \mathrm{ord}_0(D) = \mathrm{ord}_\infty(D)\Big\}.$$

Beweis. Sei $D = \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j] + c_\infty\,[\infty]$ ein beliebiger Divisor aus A, dann gilt $D\Big|S = c_0\,[\infty] + \sum_{j=1}^{p-1} c_j\,[p - j^{-1}] + c_\infty\,[0]$ und somit

$$D^* =_{\text{def.}} D\Big|(S-1) = (c_\infty - c_0)\,[0] + \sum_{j=1}^{p-1} c_j\,([p - j^{-1}] - [j]) + (c_0 - c_\infty)\,[\infty].$$

Da die Zuordnung $j \longleftrightarrow p-j^{-1}$ eine Bijektion auf $\mathbb{F}_p^*$ ist, kommt in den beiden Ausdrücken $\sum_{j=1}^{p-1} c_j\,[p-j^{-1}]$ und $\sum_{j=1}^{p-1} -c_j\,[j]$ jedes c_j genau einmal vor. Aus der Additivität der Gradabbildung folgt dann

$$\deg\left(\sum_{j=1}^{p-1} c_j\left([p-j^{-1}]-[j]\right)\right)=0.$$

Daraus erhalten wir die Aussage des Satzes, denn $\deg(D^*)=0$, $\mathrm{ord}_\infty(D^*)=0 \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_0(D^*)=\mathrm{ord}_\infty(D^*)$. ∎

LEMMA. *Es gilt*

$$A_{cc}=\Big\{D\in A\colon \mathrm{ord}_1(D)=\mathrm{ord}_{-1}(D)\Big\}.$$

Beweis. Sei wieder, wie oben, $D=\sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j]+c_\infty\,[\infty]$ ein beliebiger Divisor aus A, dann gilt

$$\begin{aligned} D^* =_{\text{def.}} D\Big|(T-T^{-1}) &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\left([j+1]-[j-1]\right)+(c_\infty-c_\infty)\,[\infty] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j+1]-\sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j-1]=\sum_{j=0}^{p-1}(c_j-c_{j+2})\,[j+1]. \end{aligned}$$

Daraus liest man sofort $c_\infty^*=\mathrm{ord}_\infty(D^*)=0$ ab. Es folgt die Aussage des Satzes, denn $\mathrm{ord}_0(D^*)=\mathrm{ord}_\infty(D^*) \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_0(D^*)=0 \Longleftrightarrow c_{-1}=c_0$ (dabei ist $\mathrm{ord}_{-1}(D)=\mathrm{ord}_{p-1}(D)$). ∎

LEMMA. *Es gilt*

$$H^0(\Gamma,A)=K\cdot\big([\infty]+D_f\big).$$

Beweis. Es ist $A^\Gamma=H^0(\Gamma,A)$, die Aussage folgt dann sofort aus aus der Tatsache, daß Γ transitiv auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ operiert. Insbesondere lassen sich die Elemente der Basis

$\{[j]: j = 0, \dots, p-1\} \cup \{[\infty]\}$ von A durch die Verkettung der Aktionen von T und S aufeinander abbilden. ■

LEMMA. *Für* $\Gamma_\infty = \langle \pm T \rangle$ *gilt*

$$A^{\Gamma_\infty} = H^0(\Gamma_\infty, A) = K \cdot [\infty] \oplus K \cdot D_f.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition der Aktion von T und der Tatsache, daß $-I$ trivial auf A operiert. ■

(3.1) PROPOSITION. *Die Menge* $\mathcal{B}_\omega =_{def.} \big\{[j] - [p-1] : 0 \le j \le p-1\big\}$ *ist eine* K*-Basis des Raumes* A_ω*.*

Beweis. Es ist klar, daß $\mathcal{B}_\omega \subseteq A_\omega$ gilt. Sei nun $D \in A_\omega$ beliebig, dann hat D eine eindeutige Darstellung $D = \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j] + c_\infty\,[\infty]$ bezüglich der K-Basis von A. Als Element des Teilraumes A_ω hat D die zusätzlichen Eigenschaften $\mathrm{ord}_\infty(D) = c_\infty = 0$ und $\deg(D) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j = 0$. Wir erhalten somit die folgende eindeutige Darstellung von D bezüglich $\mathcal{B}_\omega$, denn:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,\Big([j] - [p-1]\Big) + \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[p-1] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,\Big([j] - [p-1]\Big) + \deg(D)\,\,[p-1] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,\Big([j] - [p-1]\Big). \end{aligned}$$

■

Definition. Der Bernoulli-Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ sei die lineare Fortsetzung der Rechtsaktion:

$$\Big([j]-[p-1]\Big)\Big|B =_{\text{def.}} \sum_{i=j+1}^{p-1}[i], \quad 0\le j\le p-1.$$

(Die Summation über die leere Indexmenge, wie im Fall $j=p-1$, sei identisch 0.)

Die den Bernoulli-Operator charakterisierende Eigenschaft zeigt die Rechnung:

$$\big([j]-[p-1]\big)\Big|B\,(T-1) = \sum_{i=j+1}^{p-1}[i]\Big|(T-1) = \sum_{i=j+1}^{p-1}[i-1] - \sum_{i=j+1}^{p-1}[i] = [j]-[p-1].$$

Wir werden nun den Homomorphismus $\lambda_B\colon A\longrightarrow A_\alpha$ berechnen. Aus der Definition lesen wir dazu zunächst ab:

- $[j]\Big|(T-1)\,B = \big([j-1]-[j]\big)\Big|B = \sum_{i=j}^{p-1}[i] - \sum_{i=j+1}^{p-1}[i] = [j]$ für $j\in\mathbb{F}_p^*$,
- $[0]\Big|(T-1)\,B = \big([p-1]-[0]\big)\Big|B = -\big([0]-[p-1]\big)\Big|B = -\sum_{i=1}^{p-1}[i] = -(D_f-[0]) = [0]-D_f$,
- $[\infty]\Big|(T-1)\,B = ([\infty]-[\infty])\Big|B = 0\Big|B = 0.$

KOROLLAR. *Für alle $D\in A$ gilt*

$$D\Big|\lambda_B = -\mathrm{ord}_\infty(D)\cdot[\infty] - \mathrm{ord}_0(D)\cdot D_f.$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus den obigen Rechenregeln und der Identität $(T-1)\,B = 1+\lambda_B$, denn

$$\begin{aligned} D\Big|(T-1)\,B &= \mathrm{ord}_0(D)\cdot([0]-D_f) + \sum_{j=1}^{p-1}\mathrm{ord}_j(D)\,[j] + \mathrm{ord}_\infty(D)\cdot 0 \\ &= \mathrm{ord}_0(D)\cdot[0] + \sum_{j=1}^{p-1}\mathrm{ord}_j(D)\,[j] - \mathrm{ord}_0(D)\cdot D_f \\ &= D - \mathrm{ord}_\infty(D)\cdot[\infty] - \mathrm{ord}_0(D)\cdot D_f. \end{aligned}$$

■

SATZ. *Die Einschränkung* $p_B\big|_{W(A)}$ *des Projektors* $p_B\colon A_{cc} \longrightarrow A$ *auf den Periodenraum* $W(A)$ *ist gegeben durch:*

$$D\Big|p_B = 6\cdot D + 6\cdot \mathrm{ord}_\infty(D)\cdot\big([0]-[\infty]\big), \quad \big(D\in W(A)\big).$$

Beweis. Wir müssen die Aktion des Fehlerterms $e_B =_{\text{def.}} -2\,(1+T^{-1})\,\lambda_B\,(S-1)$ auf dem Raum $W(A)$ berechnen. Sei dazu zunächst D aus A_{cc} beliebig gewählt, d. h. $D = \sum_{j=0}^{p-1} c_j\,[j] + c_\infty\,[\infty]$ mit der Eigenschaft $c_1 = c_{-1}$. Es folgt $D^* =_{\text{def.}} D\Big|T^{-1} = c_0\,[0] + \cdots + c_{p-2}\,[p-1] + c_{p-1}\,[0] + c_\infty\,[\infty]$, also $\mathrm{ord}_0(D^*) = c_{p-1} = c_{-1} = c_1$ und $\mathrm{ord}_\infty(D^*) = \mathrm{ord}_\infty(D) = c_\infty$. Wir setzen

$$D^{**} =_{\text{def.}} = D\Big|(1+T^{-1})\,\lambda_B\,(S-1)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} D^{**} &= (D+D^*)\Big|\lambda_B\,(S-1 \\ &= (-c_\infty\,[\infty] - c_0\,D_f)\Big|(S-1) + (-c_\infty\,[\infty] - c_1\,D_f)\Big|(S-1) \\ &= (-2\,c_\infty\,[\infty] - (c_0+c_1)\,D_f)\Big|(S-1). \end{aligned}$$

Da außerdem $D_f\Big|S = ([0]+[1]+\cdots+[p-1])\Big|S = [\infty]+[1]+\cdots+[p-1] = [\infty]+D_f-[0]$ und damit $D_f\Big|(S-1) = [\infty]-[0]$ gilt, folgt (auf A_{cc})

$$\begin{aligned} D^{**} &= (-2\,c_\infty\,[\infty] - (c_0+c_1)\,D_f)\Big|(S-1) \\ &= -2\,c_\infty\,([0]-[\infty]) - (c_0+c_1)\,([\infty]-[0]) \\ &= (-2\,c_\infty + c_0 + c_1)\,([0]-[\infty])\,. \end{aligned}$$

Sei nun D aus $W(A) \subseteq A_{cc}$, dann folgt aus den Periodenrelationen $c_0 = -c_\infty$ und $c_1 = 0$

(vgl. Rechenregel für die Aktion von U), so daß wir zunächst

$$D^{**} = -3\,c_\infty\;([0]-[\infty])$$

und, nach Multiplikation mit -2, die Aussage des Satzes erhalten. ∎

(3.2) SATZ. *Die Spur des Projektors p_p auf $W(A)$ ist durch*

$$\operatorname{Tr}(p_B;\, W(A)) = 6\cdot \dim_K\bigl(W(A)\bigr) - 6$$

gegeben.

Beweis. Die Rechenregeln für die Aktion von ε auf A zeigen, daß $D\in A^\pm \iff \operatorname{ord}_j(D) = \pm\operatorname{ord}_{p-j}(D)$ für alle $j\in\mathbb{F}_p^*$ gilt. Man sieht weiterhin leicht, daß das Element $[0]-[\infty]$ in $W^+(A)$ liegt (vgl. Rechenregeln für Aktion von U) und $[0]-[\infty]$ ein Eigenvektor des Fehlerterms $6\cdot\operatorname{ord}_\infty(D)\cdot\bigl([0]-[\infty]\bigr)$ ist. Der zugehörige Eigenwert ist $6\cdot\operatorname{ord}_\infty([0]-[\infty]) = -6$, so daß wir $6\cdot\dim_K\bigl(W(A)\bigr)-6$ für die Spur von $p_B\big|_{W(A)}$ erhalten. ∎

Wir werden nun den Wert der Spur explizit berechnen, indem wir sukzessive Dimensionen gewisser Unterräume ermitteln und diese mit Hilfe von Aussagen aus der Gruppencohomologie (exakte Sequenzen) ins Verhältnis setzen.

HILFSSATZ. *Es gilt*

$$\dim_K\bigl(H^0(\langle S\rangle, A)\bigr) = \dim_K(A^{\langle S\rangle}) = \frac{1}{2}\cdot\left(p+2+\left(\frac{-1}{p}\right)\right).$$

Beweis. Wegen $[0]\Big|S=[\infty]$ und $[\infty]\Big|S=[0]$ müssen wir $c_0=c_\infty$ fordern. Daher spannt $[0]+[\infty]$ den unter der Aktion von S fixen Unterraum $K\cdot([0]+[\infty])$ auf. Für die restlichen $p-1$ Basiselemente $[j]$ für $j\in F_p^*$ ist $[j]$ genau dann ein Fixpunkt unter der Aktion von S, falls $-j^{-1}=j^*=j \iff j^2=-1$ gilt, d. h., falls -1 quadratischer Rest in $\mathbb{F}_p$ ist. Gegebenenfalls existieren genau 2 Fixpunkte, sonst 0. Wir haben also folgende disjunkte

Zerlegung von F_p^*: $F_p^* = \bigcup_{j \neq -j^{-1}} \{j, -j^{-1}\} \cup \bigcup_{j^2=-1} \{j\}$. Sei nun $l =_{\text{def.}} 1 + \left(\frac{-1}{p}\right)$, dann können wir die gesuchte Dimensionformel wie folgt aufschreiben:

$$\frac{p-1-l}{2} + l + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(p + 2 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right).$$

■

HILFSSATZ. *Es gilt*

$$\dim_K \left(H^0(\langle U \rangle, A)\right) = \dim_K(A^{\langle U \rangle}) = \frac{1}{3} \cdot \left(p + 3 + 2 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right)\right).$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für U folgt, daß der Teilraum $K \cdot ([0] + [1] + [\infty])$ fix unter der Aktion von U ist. Betrachten wir nun die Menge der restlichen $p-2$ Basiselemente $[j]$ für $j \in F_p^* \setminus \{1\}$. Diese zerfällt unter der Aktion von U in die Mengen $\{[j], [j]\big|U, [j]\big|U^2\}$ der Kardinalität 3 und die Einermengen der Fixpunkte. Dabei ist $[j]$ ein Fixpunkt, wenn $j = (1-j)^{-1} \iff j^2 - j + 1 = 0 \iff j = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3}$ in F_p^* lösbar ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn -3 ein quadratischer Rest in F_p^* ist. Gegebenenfalls gibt es genau zwei Lösungen. Setzen wir $l =_{\text{def.}} 1 + \left(\frac{-3}{p}\right)$, so erhalten wir die folgende gesuchte Dimensionsformel:

$$\frac{p-2-l}{3} + l + 1 = \frac{1}{3} \cdot \left(p + 3 + 2 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right)\right).$$

■

Beispiel F_5. Die Dimensionsformel für die Dimension von $A^{\langle S \rangle}$ über K ergibt den Wert $\frac{1}{2} \cdot \left(p + 2 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2 + 1) = 4$ und die Dimensionsformel für die Dimension von $A^{\langle U \rangle}$ über K ergibt den Wert $\frac{1}{3} \cdot \left(p + 3 + 2 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot (5 + 3 - 2) = 2$. Man beachte, daß -1 quadratischer Rest und -3 quadratischer Nichtrest in $\mathbb{F}_5$ ist. (Da $S^2 = -I$ trivial operiert, haben wir im Fall S Bahnen der Länge 2. Da $U^3 = -I$ trivial operiert, haben wir im Fall U Bahnen der Länge 3.)

1	$[0]$	$[\infty]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
S	$[\infty]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[3]$	$[1]$

(a) Die Aktionen von I und S.

1	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[\infty]$
U	$[1]$	$[\infty]$	$[4]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
U^2	$[\infty]$	$[0]$	$[3]$	$[4]$	$[2]$	$[1]$

(b) Die Aktionen von I, U und U^2.

Abbildung 3.1: $p = 5$

Nach 1.14 wissen wir bereits, daß

$$\dim_K(W(A)) = \dim_K(H_c^1(\Gamma, A))$$

gilt. Als nächstes zeigen wir außerdem den

HILFSSATZ. *Es gilt*

$$\dim_K(H_c^1(\Gamma, A)) = \dim_K\left(H^1(\Gamma, A)\right).$$

Beweis. Aus der langen exakten Sequenz (1.15) lesen wir ab:

$$\begin{aligned}
0 &= \dim_K(H^0(\Gamma, A)) - \dim_K(H^0(\Gamma_\infty, A)) \\
&\quad + \dim_K(H_c^1(\Gamma, A)) - \dim_K(H^1(\Gamma, A)) \\
&\quad + \dim_K(H^1(\Gamma_\infty, A)) - \dim_K(H_c^2(\Gamma, A)) \\
&= 1 - 2 + \dim_K(H_c^1(\Gamma, A)) - \dim_K(H^1(\Gamma, A)) \\
&\quad + \dim_K(H^1(\Gamma_\infty, A)) - \dim_K(H_c^2(\Gamma, A)).
\end{aligned}$$

Um die Dimension von $H^1(\Gamma_\infty, A)$ zu berechnen, schreiben wir A in der Form $K \cdot [\infty] \oplus \bigoplus_{j=0}^{p-1} K \cdot [j] = K \cdot [\infty] \oplus \operatorname{Ind}_{\langle \pm T^p \rangle}^{\langle \pm T \rangle}(K)$. Aus dem Lemma von Shapiro und wegen

$$H^1(G, M) \cong \operatorname{Hom}(G, M),$$

falls G trivial auf M operiert [4, Kap. 4, S. 97], folgt

$$H^1(\Gamma_\infty, A) \cong H^1(\Gamma_\infty, K \cdot [\infty] \oplus \operatorname{Ind}_{\langle \pm T^p \rangle}^{\langle \pm T \rangle}(K))$$

$$
\begin{aligned}
&\cong H^1(\Gamma_\infty, K) \oplus H^1(\langle \pm T^p \rangle, K) \\
&\cong \operatorname{Hom}(\Gamma_\infty, K) \oplus \operatorname{Hom}(\langle \pm T^p \rangle, K) \\
&\cong K \oplus K.
\end{aligned}
$$

Aus [14, S. 352, Prop. 2] für $S_0 = S$ und [14, S. 162, Prop. 1] für $M = K$ und $\Gamma = \Gamma_0(p)$ und Shapiros Lemma folgt $\dim_K\bigl(H_c^2(\Gamma, A)\bigr) = 1$ und somit die Behauptung des Satzes. ■

KOROLLAR. *Es gilt*

$$6 \cdot \dim_K\bigl(W(A)\bigr) = p - 3 \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) - 4 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right).$$

Beweis. Den gesuchten Wert für die Spur erhalten wir mit Hilfe der MAYER-VIETORIES-SEQUENZ (vgl. 1.11), denn

$$
\begin{aligned}
\dim_K(H^1(\Gamma, A)) &= \dim_K\left(A^\Gamma\right) - \dim_K\left(A^{\langle S \rangle} \oplus A^{\langle U \rangle}\right) + \dim_K(A) = \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(p + 2 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(p + 3 + 2 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right)\right)\right) + (p+1),
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
6 \cdot \dim_K\bigl(H^1(\Gamma, A)\bigr) &= 6p + 12 - \left(3p + 6 + 3 \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) + 2p + 6 + 4 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \\
&= p - 3 \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) - 4 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right).
\end{aligned}
$$

Die Aussage des Satzes folgt aus $\dim_K(W(A)) = \dim_K(H_c^1(\Gamma, A)) = \dim_K(H^1(\Gamma, A))$. ■

Direkte Berechnung der Spur von $\boldsymbol{p_B}$ auf $\boldsymbol{A_{cc}}$. Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung der Spur von $p_B \colon A_{cc} \to W(A) \subseteq A_{cc}$ direkt aus der Definition von p_B. Wir erinnern daran, daß A_{cc} durch die Eigenschaft $\operatorname{ord}([1]) = \operatorname{ord}([-1])$ charakterisiert ist,

d. h. A_{cc} hat eine K-Basis bestehend aus den p Divisoren

$$[0],[2],\ldots,[p-2],[1]+[p-1],[\infty].$$

Die Spur ist eine lineare Abbildung $A_{cc}\to K$, daher untersuchen wir nun, welche Beiträge die Aktion von p_B auf die einzelnen Basiselemente liefern. Sind etwa $e_1,\ldots,e_p$ die Basiselemente von A_{cc}, wobei $e_2=[2],\ldots,e_{p-2}=[p-2]$ gelte, so müssen wir die j-ten Koeffizienten der Bilder $\mathrm{coeff}_j(e_j\big|p_B)$ betrachten, deren Summe dann die Spur ergibt ($\sum_j\langle A\,e_j,e_j\rangle$). Man beachte, daß $\mathrm{coeff}_j(e_j\big|p_B)$ mit $\mathrm{ord}_j(e_j\big|p_B)$ übereinstimmt, wenn $j=2,\ldots,p-2$ gilt.

LEMMA. *Es gilt*

(i) $[\infty]\Big|p_B=0$, $[0]\Big|p_B=0$,

(ii) $\big([1]+[-1]\big)\Big|p_B=0$.

Beweis. (i) Sowohl die Aktion von T als auch die von T^{-1} lassen $[\infty]$ fix, daher ist $[\infty]\Big|p_B=0$. Die zweite Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned}[0]\Big|p_B&=\big([p-1]-[1]\big)\Big|(S-1)\ \big(B+\tfrac12\big)\ (S-1)\\&=2\cdot\big([1]-[p-1]\big)\Big|\ \big(B+\tfrac12\big)\ (S-1)\\&=\big([1]+2\cdot[2]+\cdots+2\cdot[p-2]+[p-1]\big)\Big|(S-1)\\&=0,\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, daß 1 und $p-1$ selbtsinvers sind und die Invertierung eineindeutig ist. Insbesondere folgt damit der letzte Schritt der obigen Rechnung, da der Divisor $[1]+2\cdot[2]+\cdots+2\cdot[p-2]+[p-1]$ invariant unter der Aktion von S ist.

(ii) Für den Bernoulli-Operator, angewendet auf Differenzen von Divisoren, gilt die

Rechenregel

$$\begin{aligned}\big([x]-[y]\big)\Big|B &= \big(([x]-[p-1]) - ([y]-[p-1])\big)\Big|B\\ &= ([x+1]+\cdots+[p-1]) - ([y+1]+\cdots+[p-1]).\end{aligned}$$

Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned}\big(\left[\tfrac{p+1}{2}\right]-\left[\tfrac{p-1}{2}\right]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right) &= \left[\frac{p+3}{2}\right]+\cdots+[p-1]\\ &\quad - \left(\left[\frac{p+1}{2}\right]+\left[\frac{p+3}{2}\right]+\cdots+[p-1]\right)\\ &\quad + \left(\left[\frac{p+1}{2}\right]-\left[\frac{p-1}{2}\right]\right)\\ &= -\left[\frac{p+1}{2}\right]+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]-\left[\frac{p-1}{2}\right]\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{p+1}{2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{2}\right],\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\big([2]-[-2]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right) &= [3]+\cdots+[p-2]+\frac{1}{2}[2]-\frac{1}{2}[-2]\\ &= \frac{1}{2}[2]+[3]+\cdots+[p-3]+\frac{1}{2}[-2].\end{aligned}$$

Für

$$D =_{\text{def.}} \big(\left[\tfrac{p+1}{2}\right]-\left[\tfrac{p-1}{2}\right]+[2]-[-2]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right),$$

gilt somit

$$\begin{aligned}D &= -\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{p+1}{2}\right]+\frac{1}{2}[2]+[3]+\cdots+[p-3]+\frac{1}{2}[-2]\\ &= \frac{1}{2}\left([2]+[2^*]+[p-2]+[(p-2)^*]\right)+\sum_j [j],\end{aligned}$$

wobei die Summe über alle $3 \le j \le p-3$ gebildet wird, die nicht in der Menge $\{2, p-$

$2, 2^*, (p-2)^*\}$ liegen. Also ist D, beachtet man $(j^*)^* = j$, invariant unter der Aktion von $S\colon [j] \longmapsto [j^*]$, woraus sofort die Aussage, nämlich $D\big|(S-1) = 0$, folgt. ■

Schließlich müssen wir noch die Aktion des Projektors auf den restlichen Basiselementen betrachten, d. h. auf den Elementen $[j]$ für $j \in F_p^* \setminus \{\pm 1\}$. Für $j = 2, \dots, p-2$ ist

$$\begin{aligned} D_j &=_{\text{def.}} [j]\Big| \left(T - T^{-1}\right) (S-1) \left(B + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= ([j-1] - [j+1]) \Big|(S-1) \left(B + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= ([(j-1)^*] - [(j+1)^*] + [j+1] - [j-1]) \Big| \left(B + \tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Spur müssen wir noch $(S-1)$ auf D_j operieren lassen, so daß wir mit

$$D_j^* =_{\text{def.}} D_j\Big|S$$

die Spurformel wie folgt aufschreiben können:

$$\mathrm{Tr}\,(p_B;\, A_{cc}) = \sum_{j=2}^{p-2} \mathrm{ord}_j(D_j^* - D_j) = \sum_{j=2}^{p-2} \mathrm{ord}_j(D_j^*) - \sum_{j=2}^{p-2} \mathrm{ord}_j(D_j).$$

Für die Ermittlung der beiden Summen auf der rechten Seite ist es notwendig, D_j und dann D_j^* explizit zu bestimmen.

HILFSSATZ. *Für alle $i, k \in F_p^*$, $i, k \neq \pm 1$ mit $i < k$ gilt:*

$$([i] - [k])\Big| \left(B + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,[i] + \sum_{i<j<k} [j] + \frac{1}{2}\,[k].$$

Beweis. Es gilt $([i] - [k])\Big| \left(B + \tfrac{1}{2}\right) = ([i+1] + \cdots + [p-1]) - ([k+1] + \cdots + [p-1]) = [i+1] + \cdots + [k] + \tfrac{1}{2}\,([i] - [k]) = \tfrac{1}{2}\,[i] + [i+1] + \cdots + [k] - \tfrac{1}{2}\,[k]$. Dies ist genau die behauptete Summe, wobei der Fall $i+1 = k$ enthalten ist, denn in diesem Fall gilt $\sum_{i<j<k} [j] = 0$. ■

KOROLLAR. *Für alle $j \in F_p^*$, $j \neq \pm 1$ gilt:*

$$\big([j+1]-[j-1]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,[j-1]-[j]-\frac{1}{2}\,[j+1].$$

Beweis. Man wende den vorangegangenen Satz auf $i=j-1$ und $k=j+1$ an. Anschließende Multiplikation mit -1 ergibt die Aussage. ■

Als weitere direkte Konsequenz erhalten wir das folgende

KOROLLAR. *Für jedes $j \in F_p^*$, $j \neq \pm 1$ mit $(j-1)^* < (j+1)^*$ gilt:*

$$\big([(j-1)^*]-[(j+1)^*]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,[(j-1)^*]+\sum_{(j-1)^*<r<(j+1)^*}[r]+\frac{1}{2}\,[(j+1)^*].$$

Der entgegengesetzte Fall $j \in F_p^*$, $j \neq \pm 1$ und $(j+1)^* < (j-1)^*$ impliziert (Multiplikation mit -1) die Gleichung:

$$\big([(j-1)^*]-[(j+1)^*]\big)\Big|\left(B+\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,[(j-1)^*]-\sum_{(j+1)^*<r<(j-1)^*}[r]-\frac{1}{2}\,[(j+1)^*].$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß für $(j-1)^* < (j+1)^*$ die Gleichungen

$$D_j = -\frac{1}{2}\,[j-1]-[j]-\frac{1}{2}\,[j+1]+\frac{1}{2}\,[(j-1)^*]+\sum_{(j-1)^*<r<(j+1)^*}[r]+\frac{1}{2}\,[(j+1)^*],$$

$$D_j^* = -\frac{1}{2}\,[(j-1)^*]-[j^*]-\frac{1}{2}\,[(j+1)^*]+\frac{1}{2}\,[j-1]+\sum_{(j-1)^*<r<(j+1)^*}[r^*]+\frac{1}{2}\,[j+1]$$

und für $(j+1)^* < (j-1)^*$ die Gleichungen

$$D_j = -\frac{1}{2}\,[j-1]-[j]-\frac{1}{2}\,[j+1]-\frac{1}{2}\,[(j-1)^*]-\sum_{(j+1)^*<r<(j-1)^*}[r]-\frac{1}{2}\,[(j+1)^*],$$

$$D_j^* = -\frac{1}{2}\,[(j-1)^*]-[j^*]-\frac{1}{2}\,[(j+1)^*]-\frac{1}{2}\,[j-1]-\sum_{(j+1)^*<r<(j-1)^*}[r^*]-\frac{1}{2}\,[j+1]$$

gelten.

Definition. Für jede Primzahl $p > 3$ sei

$$N_{\pm}(p) =_{\text{def.}} \#\big\{j \in F_p^* \setminus \{\pm 1\} \colon (j-1)^* < \pm j < (j+1)^*\big\}$$

und

$$N_{\pm}^*(p) =_{\text{def.}} \#\big\{j \in F_p^* \setminus \{\pm 1\} \colon (j-1)^* < \pm j^* < (j+1)^*\big\}.$$

Mit Hilfe dieser vier Kardinalitäten können wir nun die Spurformel wie folgt aufschreiben.

SATZ. *Die Spur des Operators $p_B \colon A_{cc} \longrightarrow W(A)$ ist durch*

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(p_B;\, A_{cc}) = p - 3 - N_+(p) + N_-(p) + N_+^*(p) - N_-^*(p)\\ - \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Wie bereits gezeigt, liefert die Aktion des Projektors p_B auf den Basiselementen $[0], [\infty]$ und $[1] + [-1]$ keinen Beitrag zur Spur. Es reicht daher, die Aktion für die Elemente $[j] \in A_{cc}$ mit $j \in F_p^* \setminus \{\pm 1\}$ zu untersuchen. Die Spur ist daher die Differenz $S^* - S$ für $S^* =_{\text{def.}} \sum_{j=2}^{p-2} \operatorname{ord}_j(D_j^*)$ und $S =_{\text{def.}} \sum_{j=2}^{p-2} \operatorname{ord}_j(D_j)$ aus K. Man sieht leicht, daß $S = N_+(p) - N_-(p) - (p-3)$ ist, da sich die mit $\pm\frac{1}{2}$ gewichteten Randfälle (für $j = (j-1)^*$ und $j = (j+1)^*$) paarweise aufheben. Dies folgt wegen $j = (j-1)^* < (j+1)^* \iff -j = p - j = (-j+1)^* > (-j-1)^*$. (Diese Äquivalenz stimmt wegen $j_1 < j_2 \Rightarrow p - j_1 = -j_1 > p - j_2 = -j_2$ und $(p-j)\,(p-j^{-1}) = p^2 - p\,j^{-1} - j\,p + 1 = 1$ in $\mathbb{F}_p$, was wiederum $(-j)^* = (p-j)^* = p - (p-j)^{-1} = p - (p - j^{-1}) = j^{-1} = -j^*$ impliziert. Ist D_j ein Divisor, der einen Randbeitrag leistet, so ist der zugehörige zweite Divisor, der diesen Beitrag wieder aufhebt, genau $D_{p-j} = D_{-j}$.) Die Bestimmung von S^* erfolgt auf ähnliche Weise, wobei sich die Randfälle ($j = j^*$, $j = (j-1)^*$ und $j = (j+1)^*$) auf den Teilterm $-\frac{1}{2}\,[(j-1)^*] - [j^*] - \frac{1}{2}\,[(j+1)^*]$ von D_j^* auswirken und damit einen

Beitrag liefern. Es ist in $\mathbb{F}_p$

$$\begin{aligned} j = j^* &\Leftrightarrow j = p - j \\ &\Leftrightarrow j^2 = p\,j - 1 \\ &\Leftrightarrow j^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \text{ ist quadratischer Rest} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1. \end{aligned}$$

Gegebenenfalls liefern die Divisoren D_j und D_{j^*} den Beitrag -1, also ingesamt $-2 = -\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} j = (j-1)^* &\Leftrightarrow p - j^{-1} = j - 1 \\ &\Leftrightarrow p\,j - 1 = j^2 - j \\ &\Leftrightarrow j^2 - j + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \text{ ist quadratischer Rest} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} j = (j+1)^* &\Leftrightarrow p - 1^{-1} = j + 1 \\ &\Leftrightarrow p\,j - 1 = j^2 + j \\ &\Leftrightarrow j^2 + j + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \text{ ist quadratischer Rest} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1. \end{aligned}$$

In beiden Fällen liefern die Divisoren D_j und D_{j^*} einen Beitrag von $-\frac{1}{2}$, also ingesamt $-2 = -\left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right)$. ■

Man erhält mit Hilfe der Ergebnisse des vorherigen Abschnittes die folgende, in der Literatur bisher unerwähnte, Identität.

SATZ. *Für jede Primzahl $p > 3$ sei*

$$N(p) =_{def.} N_+(p) - N_-(p) - N_+^*(p) + N_-^*(p),$$

dann gilt:

$$N(p) = 2 \cdot \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) + 3 \cdot \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) - 4.$$

Beweis. Mit der Spurformel $\mathrm{Tr}\,(p_B;\, W(A))$ aus dem vorherigen Abschnitt folgt

$$p - 3 \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) - 4 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right) - 6 = p - 3 - N_+ + N_- + N_+^* - N_-^* - 1 - \left(\frac{-1}{p}\right) - 1 - \left(\frac{-3}{p}\right),$$

also ist

$$N_+ - N_- - N_+^* + N_-^* = 1 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) + 3 \cdot \left(\frac{-3}{p}\right) = 2 \cdot \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) + 3 \cdot \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) - 4.$$

(Dabei wurden $N_\pm$ und $N_\pm^*$ abkürzend für $N_\pm(p)$ und $N_\pm^*(p)$ resp. benutzt.) ■

Die folgende Tabelle ist das Ergebnis numerischer Berechnungen der oben definierten Größen für kleine Primzahlen $3 < p < 200$.

p	$N(p)$	$N_+^*(p)$	$N_-^*(p)$	$N_+(p)$	$N_-(p)$	$1+\left(\frac{-1}{p}\right)$	$1+\left(\frac{-3}{p}\right)$	$\mathrm{Tr}\,(p_B;\,A_{cc})$
5	0	0	0	0	0	2	0	0
7	2	0	0	0	2	0	2	0
11	−4	0	2	2	0	0	0	12
13	6	2	0	0	4	2	2	0
17	0	2	2	2	2	2	0	12
19	2	2	2	2	4	0	2	12
23	−4	0	2	2	0	0	0	24
29	0	2	2	2	2	2	0	24
31	2	6	6	6	8	0	2	24
37	6	8	6	6	10	2	2	24
41	0	6	6	6	6	2	0	36
43	2	6	6	6	8	0	2	36
47	−4	6	8	8	6	0	0	48
53	0	6	6	6	6	2	0	48
59	−4	8	10	10	8	0	0	60
61	6	14	12	12	16	2	2	48
67	2	12	12	12	14	0	2	60
71	−4	8	10	10	8	0	0	72
73	6	14	12	12	16	2	2	60
79	2	10	10	10	12	0	2	72
83	−4	8	10	10	8	0	0	84
89	0	14	14	14	14	2	0	84
97	6	16	14	14	18	2	2	84
101	0	20	20	20	20	2	0	96
103	2	16	16	16	18	0	2	96
107	−4	12	14	14	12	0	0	108
109	6	16	14	14	18	2	2	96
113	0	14	14	14	14	2	0	108
127	2	22	22	22	24	0	2	120
131	−4	18	20	20	18	0	0	132
137	0	18	18	18	18	2	0	132
139	2	26	26	26	28	0	2	132
149	0	16	16	16	16	2	0	144
151	2	26	26	26	28	0	2	144
157	6	28	26	26	30	2	2	144
163	2	24	24	24	26	0	2	156
167	−4	24	26	26	24	0	0	168
173	0	28	28	28	28	2	0	168
179	−4	18	20	20	18	0	0	180
181	6	34	32	32	36	2	2	168
191	−4	26	28	28	26	0	0	192
193	6	34	32	32	36	2	2	180
197	0	26	26	26	26	2	0	192
199	2	34	34	34	36	0	2	192

Bemerkung. Aus dem EICHLER-SHIMURA-ISOMORPHISMUS folgt, daß $W(A)$ über $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathscr{M}_2(\Gamma_0(p)) \oplus \mathscr{S}_2\big(\Gamma_0(p)\big)$ ist (vgl. 1.47). Weiterhin gilt $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathscr{E}_2\big(\Gamma_0(p)\big)\big) = 1$ (vgl. 1.44), so daß die Identität

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(W(A)\big) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathscr{S}_2\big(\Gamma_0(p)\big)\big) + 1 = 2 \cdot g_0(p) + 1$$

folgt. Dabei bezeichnet $g_0(p)$ das Geschlecht der Modulkurve $X_0(p)$. Aufgrund von 3.2 erhalten wir:

$$\operatorname{Tr}(p_B;\, A_{cc}) = \operatorname{Tr}(p_B;\, W(A)) = 6 \cdot \big(\dim_{\mathbb{C}}\big(W(A)\big) - 1\big) = 12 \cdot g_0(p).$$

Eine entsprechende Formel zu Berechnung des Geschlechts $g_0(p)$ findet man z. B. in [30, Chap. 6, S. 92]. In der folgenden Tabelle sind die ersten 44 Werte zu finden ($p > 3$).

p	$g_0(p)$	p	$g_0(p)$	p	$g_0(p)$	p	$g_0(p)$	p	$g_0(p)$	p	$g_0(p)$
5	0	31	2	67	5	103	8	149	12	191	16
7	0	37	2	71	6	107	9	151	12	193	15
11	1	41	3	73	5	109	8	157	12	197	16
13	0	43	3	79	6	113	9	163	13	199	16
17	1	47	4	83	7	127	10	167	14		
19	1	53	4	89	7	131	11	173	14		
23	2	59	5	97	7	137	11	179	15		
29	2	61	4	101	8	139	11	181	14		

Tabelle 3.1: $g_0(p)$, $3 < p < 200$

Kapitel 4:

Heckeoperatoren

Eine der wichtigsten Strukturen auf dem Raum der klassischen Modulformen ist die Aktion der *Hecke-Algebra.* Wir werden in diesem Kapitel *Heckeoperatoren* auf *abstrakten Periodenräumen* studieren und für diese einen *Prototypen* einer *Spurformel* herleiten. Im anschließenden Kapitel werden wir diese abstrakte Spurformel anwenden und spezialisieren auf Räume von Modulformen für die volle Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

§1. Grundlagen

Sei $\Delta = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$ die Halbgruppe der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}$.

(4.1) *Definition.* Für jedes $n \geq 1$ betrachten wir die Menge $\Delta(n)$, bestehend aus allen Matrizen M aus Δ der Determinante n:

$$\Delta(n) =_{\text{def.}} \bigl\{M \in \Delta\colon\ \det(M) = n\bigr\}.$$

Bemerkung. $\Delta(n)$ ist nicht abgeschlossen unter Multiplikation. Die Inverse von $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta(n)$ existiert über $\mathbb{Q}$ und ist gegeben durch:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \mathrm{adj}(M) = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

wobei $\operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die *Adjunkte* zu M ist. (Z. B. ist für $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \Delta(29)$ die Inverse gegeben durch $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{29} & \frac{-2}{29} \\ \frac{-3}{29} & \frac{5}{29} \end{pmatrix}$, wobei $\det(M^{-1}) = \frac{29}{29^2} = \frac{1}{29} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt.)

(4.2) *Definition.* Eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta(n)$ heißt *reduziert*, falls $0 \le c < a$ und $0 \le b < d$ gilt. Wir schreiben $\mathcal{M}(n)$ für die Menge aller reduzierten Matrizen aus $\Delta(n)$.

Bemerkung. $\mathcal{M}(n)$ ist endlich, denn $a + d > n + 1$ impliziert $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) > n$, wie $ad - bc \ge ad - (a-1)(d-1) = a + d - 1 > n$ zeigt. Es gibt aber nur endlich viele Tupel $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, die $a + d - 1 \le n$, $0 \le c < a$ und $0 \le b < d$ erfüllen.

Wir betrachten neben $\mathcal{M}(n)$ die beiden folgenden Teilmengen von $\mathcal{M}(n)$:

$$\mathcal{M}_A(n) =_{\text{def.}} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n) \colon b = 0 \right\}, \quad \mathcal{M}_\Omega(n) =_{\text{def.}} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n) \colon c = 0 \right\}.$$

Bemerkung. Die Zuordnung $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ definiert eine Bijektion $\mathcal{M}_A(n) \longrightarrow \mathcal{M}_\Omega(n)$. Der Durchschnitt $\mathcal{M}_A(n) \cap \mathcal{M}_\Omega(n)$ besteht aus allen Diagonalmatrizen $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $\det(D) = a\,d = n$.

Geht man von einer beliebigen reduzierten Matrix M aus, so kann man dieser durch sukzessives Abspalten von Faktoren in eindeutiger Weise Matrizen $\alpha(M) \in M_A(n)$ und $\omega(M) \in M_\Omega(n)$ zuordnen.

(4.3) LEMMA. *Für jede reduzierte Matrix* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ *mit* $c > 0$ *existiert genau* *ein $N \in \mathbb{Z}$, so daß* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^N S \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ *gilt. Gegebenenfalls ist $N \geq 2$ und $a' < a$.*

Beweis. Es wird $c > 0$ vorausgesetzt. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \left(T^N S\right)^{-1} M = S^{-1} T^{-N} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ Nc - a & Nd - b \end{pmatrix} \in \Delta(n)$$

ist nach Definition genau dann reduziert, wenn die vier Ungleichungen $0 \leq Nc - a < c$ und $0 \leq d < Nd - b$ sind. Die ersten beiden Ungleichungen sind äquivalent zu $a \leq Nc < c + a \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \leq N < 1 + \frac{a}{c} \Longleftrightarrow N - 1 < \frac{a}{c} \leq N$. Aus dieser Ungleichung folgt die Eindeutigkeit von N, falls ein solches N existiert. Gegebenenfalls ist $N \geq 2$, da $c < a$ bzw. $\frac{a}{c} > 1$ gilt. Die zweiten Ungleichungen folgen aus den ersten, denn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ impliziert $d > 0$, so daß $d < Nd - b$ äquivalent zu $\frac{b}{d} < N - 1$ ist. Die letzte Ungleichung ist aber bereits wegen $N \geq 2$ und $\frac{b}{d} < 1$ erfüllt (es folgt die Existenz). Wir haben insgesamt die folgende Gleichung gezeigt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^N S \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Na' - c' & Nb' - d' \\ a' & b' \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ und $a' = c < a$ gilt. ■

(4.4) LEMMA. *Für jede reduzierte Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ mit $b > 0$ existiert genau ein $N \in \mathbb{Z}$, so daß $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = T^N S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ gilt. Gegebenenfalls ist $N \geq 2$ und $d' < d$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $b > 0$ und

$$T^N S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Na - c & Nb - d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Delta(n)$$

genau reduziert, wenn die beiden Ungleichungen $0 \leq a < Na - c$ und $0 \leq Nb - d < b$ erfüllt sind. Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $N - 1 < \frac{d}{b} \leq N$, woraus die Eindeutigkeit von N folgt, falls ein solches N existiert. Gegebenenfalls ist $N \geq 2$, da nach Voraussetzung M reduziert ist, also $b < d$ und damit $\frac{d}{b} > 1$ gilt. Die zweiten Ungleichungen folgen aus den ersten, da nach Voraussetzung $a > 0$ und damit $a < Na - c$ gilt, was äquivalent zu $\frac{c}{a} < N - 1$ ist. Die letzte Ungleichung ist aber aufgrund von $N \geq 2$ und $\frac{c}{a} < 1$ stets erfüllt (es folgt die Existenz). Um den Beweis zu schließen, lesen wir noch $d' = b < d$ ab. ■

(4.5) LEMMA. *Für jede reduzierte Matrix $M \in \mathcal{M}(n)$ $(n \geq 1)$ existieren Matrizen $\alpha = \alpha(M) \in \mathcal{M}_A(n)$ und $\omega = \omega(M) \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ sowie ganze Zahlen $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ und $l_1, \ldots, l_s \geq 2$, so daß gilt:*

(i) $\alpha(M) = T^{k_1} S \cdots T^{k_r} S M$,

(ii) $M = T^{l_1} S \cdots T^{l_s} S \omega(M)$.

Dabei sind α, ω und k_i, l_j $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s)$ eindeutig durch M bestimmt. Man sagt, M gehört zu dem Paar $(\alpha, \omega) \in \mathcal{M}_A(n) \times \mathcal{M}_\Omega(n)$. (Für den Fall $M \in \mathcal{M}_A(n)$ setzen wir $r = 0$ in (i). Für den Fall $M \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ setzen wir $s = 0$ in (ii). Ist D eine Diagonalmatrix aus $\mathcal{M}_A(n) \cap \mathcal{M}_\Omega(n)$, so folgt $r = s = 0$.)

Beweis. Die Existenz von (i) folgt aus 4.4, die von (ii) aus 4.3. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit. Seien $M = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\alpha(M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\omega(M) = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & d^* \end{pmatrix}$ die Matrizen aus (i) und (ii). Wir zeigen zunächst, daß die Zahlen a, c, d und a^*, b^*, d^* eindeutig bestimmt sind. Es gilt

$$\alpha(M)\, M^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} ad' & -ab' \\ cd' - c'd & a'd - b'c \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

sowie

$$M\,\omega(M)^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ 0 & a^* \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a'd^* & a^*b' - a'b^* \\ c'd^* & a^*d' - b^*c' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).$$

Aus der ersten Gleichung lesen wir $\mathrm{ggT}\left(\frac{d'}{d}, \frac{b'}{d}\right) = 1$ und folglich $d = \mathrm{ggT}(d', b')$ und $X\,\frac{d'}{d} + Y\,\frac{b'}{d} = 1$ für $X, Y \in \mathbb{Z}$ ab. Aus dem Wert von d folgt der Wert von a, denn $a = \frac{n}{d}$. Um die Eindeutigkeit von c nachzuweisen, benutzen wir die Kongruenzen $c\,d' \equiv c'd \bmod (n)$ und $a'd \equiv b'c \bmod (n)$. Diese sind äquivalent zu $c\,\frac{d'}{d} \equiv c' \bmod (a)$ und $c\,\frac{b'}{d} \equiv a' \bmod (a)$. Daraus folgt $X\,c' + Y\,a' \equiv \left(X\,\frac{d'}{d} + Y\,\frac{b'}{d}\right)c = c \bmod (a)$. Damit ist c eindeutig durch $0 \le c < a$ bestimmt. Aus der zweiten Gleichung folgt analog $\mathrm{ggT}\left(\frac{a'}{a^*}, \frac{c'}{a^*}\right) = 1$, also $a^* = \mathrm{ggT}(a', c')$ und $X'\,\frac{a'}{a^*} + Y'\,\frac{c'}{a^*} = 1$ für $X', Y' \in \mathbb{Z}$ und $d^* = \frac{n}{a^*}$. Es gilt weiterhin $a^*b' \equiv a'b^* \bmod (n)$ und $a^*d' \equiv b^*c' \bmod (n)$. Daher ist $b' \equiv b^*\,\frac{a'}{a^*} \bmod (d^*)$ sowie $b^*\,\frac{c'}{a^*} \equiv d' \bmod (d^*)$ und damit $X'\,b' + Y'\,d' \equiv X'b^*\,\frac{a'}{a^*} + Y'b^*\,\frac{c'}{a^*} = \left(X'\,\frac{a'}{a^*} + Y'\,\frac{c'}{a^*}\right)b^* = b^* \bmod (d^*)$. Damit ist b^* eindeutig bestimmt durch $0 \le b^* < d^*$. Es bleibt, die Eindeutigkeit der Exponenten $k_1, \ldots, k_r$ und $l_1, \ldots, l_s$ zu zeigen. Sei dazu $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = TST$, dann erzeugen T und V eine freie Halbgruppe in $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (vgl. [12, Chap. 3.1, Lemma 2]). Wegen

$$T^{k_1}\,S \cdots T^{k_r}\,S = T^{k_1-1}\,V\,T^{k_2-2}\,V \cdots T^{k_r-1}\,S$$

folgt die Eindeutigkeit, da je zwei solche Ausdrücke genau dann identisch sind, wenn ihre Exponenten gleich sind. Das gleiche Argument ergibt die Eindeutigkeit der Exponenten $l_1, \ldots, l_s$. ■

(4.6) KOROLLAR. *Startet man mit einer Matrix $\alpha \in \mathcal{M}_A(n)$, so impliziert das Lemma $\alpha = T^{l_1}\,S \cdots T^{l_s}\,S\,\omega(\alpha)$, wobei $\omega = \omega(\alpha) \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Bijekion:*

$$\Phi\colon \mathcal{M}_A(n) \longrightarrow \mathcal{M}_\Omega(n).$$

Die Diagonalmatrizen $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_A(n) \cap \mathcal{M}_\Omega(n)$ *sind fix unter der Abbildung* Φ, *also* $\Phi(D) = D$. *Die reduzierten Matrizen* $M \in \mathcal{M}(n)$, *die zum Paar* (α, ω) *gehören, sind durch*

$$M_j =_{def.} T^{l_j}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega, \quad (j = 1, \ldots, s+1) \tag{4.7}$$

gegeben. Die Extremfälle sind

$$M_1 = \alpha, \qquad M_{s+1} = \omega. \tag{4.8}$$

(4.9) LEMMA. *Für* $n \geq 1$ *sei* $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_A(n)$ *und* $\omega = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & d^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\Omega(n)$. *Dann ist* $\omega = \Phi(\alpha)$ *genau dann, wenn gilt:*

(i) $a^* = \mathrm{ggT}(a, c)$,

(ii) $d = \mathrm{ggT}(b^*, d^*)$,

(iii) $\frac{b^*}{d} \cdot \frac{c}{a^*} \equiv 1 \bmod \left(\frac{a}{a^*}\right)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: α und ω stehen genau dann in Bijektion, wenn es ein $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit $\alpha = M\, \omega$ gibt. M ist dann eindeutig bestimmt durch $M = T^{k_1}\, S \cdots T^{k_r}\, S = \alpha\, \omega^{-1} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Nach der Cramerschen Regel gilt nun

$$M = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ 0 & a^* \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a\, d^* & -a\, b^* \\ c\, d^* & a^*\, d - b^*\, c \end{pmatrix}.$$

Wegen $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ erhalten wir leicht (linke Spalte und obere Zeile haben jeweils coprime Einträge) (i) $\frac{a}{a^*}, \frac{c}{a^*} \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(\frac{a}{a^*}, \frac{c}{a^*}) = 1$, (ii) $\frac{d^*}{d}, \frac{b^*}{d} \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(\frac{d^*}{d}, \frac{b^*}{d}) = 1$ und (iii) $a^*\, d - b^*\, c \equiv 0 \bmod (n)$, wobei (iii) äquivalent zu $\frac{b^*}{d} \cdot \frac{c}{a^*} \equiv 1 \bmod \left(\frac{n}{a^*\, d}\right)$ ist und $\frac{n}{a^*\, d} = \frac{a\, d}{a^*\, d} = \frac{a}{a^*}$ gilt.

„$\Leftarrow$“: Die umgekehrte Richtung, (i)-(iii) $\Rightarrow \omega = \Phi(\alpha)$, folgt, wenn wir $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ aus (i)-(iii) gewinnen können. Genauer ist zu zeigen, daß n Teiler von $a\, d^*$, $-a\, b^*$, $c\, d^*$ und

$a^*\,d - b^*\,c$ ist. Aus (i) folgt, $n = d^*\,a^*$ teilt $a\,d^*$ sowie $c\,d^*$. Gleichung (ii) impliziert, daß $n = a\,d$ Teiler von $-a\,b^*$ ist, und (iii) ist wie im ersten Teil zu betrachten, d. h. $n \big| \, (a^*\,d - b^*\,c)$. (Die Determinante von M ist gegeben durch $\frac{1}{n^2}\big(\,a\,d^*\,(a^*d - b^*c) + ab^*\,cd^*\big) = \frac{1}{n^2}\big(aa^*dd^* - acd^*b^* + ab^*cd^*\big) = \frac{1}{n^2}\,ada^*d^* = \frac{n^2}{n^2} = 1$.) ■

KOROLLAR. *Seien $n = p$ eine Primzahl und $1 \leq j, j^* < p$. Dann ist* $\Phi\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & j^* \\ 0 & p \end{pmatrix} \Longleftrightarrow j\,j^* \equiv 1 \bmod (p)$.

§2. Heckeoperatoren

Sei K ein Körper der Charakterisitik 0, $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und A ein $K[\Gamma]$-(Rechts-) Modul, wobei $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ trivial auf A operiert. Wie in Kapitel 1 sei eine Aktion auf A für die Gruppe

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma \cup \varepsilon\,\Gamma, \quad T_{-1} = \varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$$

definiert. Wir nehmen an, daß diese Aktion die Einschränkung einer linearen Aktion von ganz Δ auf A ist.

Wir geben nun die Konstruktion der Heckeoperatoren in [12, Kap. 2, S. 253] wieder.

(4.10) SATZ. ([15, Chap. IX, S. 256], [17, Chap. 2.1, Lemma 1]) *Für jedes $n \geq 1$ hat $\Delta(n)$ folgende Γ-Nebenklassen-Zerlegungen:*

$$\Delta(n) = \Gamma \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \bigsqcup_{\substack{ad=n,\\ 0\leq c<a}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma = \bigsqcup_{\substack{ad=n,\\ 0\leq b<d}} \Gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

(4.11) *Definition.* Sei $n \geq 1$, dann ist durch

$$T_n =_{\text{def.}} \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\leq b<d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \omega$$

der n-te *Heckeoperator auf A* gegeben. Durch

$$\Big(T_n\,\varphi\Big)(\gamma) = \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \varphi\,(\gamma')\,\Big|\omega', \quad \varphi\in Z^1(\Gamma,A)$$

ist der n-te *Heckeoperator auf* $Z^1(\Gamma, A)$ (bzw. $H^1(\Gamma, A)$) gegeben, wobei $\gamma' \in \Gamma$ und $\omega' \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ in eindeutiger Weise aus der Gleichung $\omega\,\gamma = \gamma'\,\omega'$ (4.10) gewonnen werden.

SATZ. *Für jedes $n \geq 1$ ist der n-te Heckeoperator, T_n, ein wohldefinierter linearer Operator $Z^1(\Gamma, A) \longrightarrow Z^1(\Gamma, A)$, der parabolische 1-Cozyklen auf parabolische 1-Cozyklen abbildet.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}_\Omega(n) = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ und γ, $\delta \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt $\omega_i\,\gamma = \gamma_i\,\omega_{\gamma(i)}$ und $\omega_i\,\delta = \delta_i\,\omega_{\delta(i)}$, wobei $\gamma_i, \delta_i \in \Gamma$ und die Indizes $\gamma(i), \delta(i)$ eindeutig bestimmt sind für alle $i = 1, \dots, m$. Dabei durchlaufen $\gamma(i)$ und $\delta(i)$ alle Werte von $1, \dots, m$. Wegen $\omega_{\gamma(i)}\delta = \delta_{\gamma(i)}\,\omega_{\delta(\gamma(i))}$ folgt $\omega_i\,(\gamma\,\delta) = \gamma_i\,\omega_{\gamma(i)}\,\omega^{-1}_{\gamma(i)}\,\delta_{\gamma(i)}\,\omega_{\delta(\gamma(i))} = \gamma_i\,\delta_{\gamma(i)}\,\omega_{\delta(\gamma(i))}$ und damit

$$(T_n\,\varphi)\,(\gamma\,\delta) = \sum_{i=1}^{m} \varphi\,\big(\gamma_i\,\delta_{\gamma(i)}\big)\,\Big|\omega_{\delta(\gamma(i))}$$

für jeden beliebigen 1-Cozyklus $\varphi \in Z^1(\Gamma, A)$. Unter Ausnutzung der Cozykluseigenschaft von φ leiten wir die Cozykluseigenschaft von $T_n\,\varphi$ ab:

$$\begin{aligned}(T_n\,\varphi)\,(\gamma)\Big|\delta &= \sum_{i=1}^{m} \varphi(\gamma_i)\Big|\omega_{\gamma(i)}\,\delta \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi(\gamma_i)\Big|\delta_{\gamma(i)}\,\omega_{\delta(\gamma(i))}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\varphi\left(\gamma_i\, \delta_{\gamma(i)}\right) - \varphi\left(\delta_{\gamma(i)}\right) \Big) \Big| \omega_{\delta(\gamma(i))}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(\gamma_i\, \delta_{\gamma(i)}\right) \Big| \omega_{\delta(\gamma(i))} - \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(\delta_{\gamma(i)}\right) \Big| \omega_{\delta(\gamma(i))}$$

$$= (T_n\, \varphi)(\gamma\delta) - (T_n\, \varphi)(\delta).$$

Ist φ parabolisch, so folgt wegen $\varphi(-1) = 0$ sofort $(T_n\, \varphi)(-1) = \sum_{i=1}^m \varphi(-1)\Big|\omega_i = 0$. Für $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_i\, \omega_{T(i)}$ mit $\omega_i = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ und $\omega_{T(i)} = \begin{pmatrix} a & x_i \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $(ad = n, 0 \leq x_i < d)$. Daher ist $T_i = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -x_i \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} ad & a(a+b-x_i) \\ 0 & ad \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & y_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{y_i}$ für $y_i \in \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi(T^{y_i}) = 0$ folgt $(T_n\, \varphi)\,(T) = \sum_{i=1}^m \varphi(T_i)\Big|\omega_{T(i)} = 0$. ■

Bemerkung. Neben der Aktion von $T_{-1} = \varepsilon$ auf A definieren wir eine Aktion auf $Z_c^1(\Gamma, A)$ durch

$$(T_{-1}\, \varphi) =_{\text{def.}} \varphi(\gamma')\Big|\varepsilon,$$

wobei γ' aus der Gleichung $\varepsilon\, \gamma = \gamma'\, \varepsilon$, $\gamma' \in \Gamma$ gewonnen wird. T_{-1} operiert als Involution auf $Z_c^1(\Gamma, A)$, und es gilt $(T_{-1}\, \varphi)(S) = \varphi(S)\Big|\varepsilon$. Wir erhalten auf diese Weise die Zerlegung $Z_c^1(\Gamma, A) = Z_c^1(\Gamma, A)^- \oplus Z_c^1(\Gamma, A)^+$ von $Z_c^1(\Gamma, A)$ in die ± 1-Eigenräume $Z_c^1(\Gamma, A)^\pm$.

Als nächstes wollen wir die Aktion von T_n auf dem Raum $Z_c^1(\Gamma, A)$ der parabolischen 1-Cozyklen berechnen.

(4.12) SATZ. *Für jedes $n \geq 1$ und jeden parabolischen 1-Cozyklus $\varphi \in Z_c^1(\Gamma, A)$ gilt:*

$$\big(T_n\, \varphi\big)(S) = \varphi\,(S)\,\Big|\sum_{M \in \mathcal{M}(n)} M.$$

Beweis. Sei $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\Omega(n)$, dann ist $0 \le b < d$ und

$$\begin{aligned}
\alpha &=_{\text{def.}} S^{-1}\, T^{-1}\, \omega\, S \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & 0 \\ d-b & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

reduziert, also aus $\mathcal{M}_A(n)$, falls $0 < b < d$ gilt. Nach 4.5 (ii) erhalten wir in eindeutiger Weise die Darstellung $\alpha = T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega'$ für $\omega' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\Omega(n)$, wobei $\Phi(\alpha) = \omega'$. Es folgt $\omega\, S = \gamma'\, \omega'$ mit $\gamma' = T\, S\, T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S$ und dann, unter Ausnutzung, daß φ ein parabolischer 1-Cozyklus ist,

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma')\Big|\omega' &= \varphi(T\, S\, T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S)\Big|\omega' \\
&= \varphi(T)\Big|S\, T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega' + \varphi(S\, T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S)\Big|\omega' \\
&= \varphi(S\, T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S)\Big|\omega' \\
&= \varphi(S)\Big|T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega' + \varphi(T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s})\Big|\omega' \\
&\;\vdots \\
&= \varphi(S)\Big| \sum_{i=1}^{s} T^{l_i}\, S \cdots T^{l_s}\, \omega'.
\end{aligned}$$

D. h. $\varphi(\gamma')\Big|\omega' = \varphi(S)\Big|\sum M$, wobei M die Menge aller reduzierten Matrizen, die zum Paar (α, ω') gehören, durchläuft. Für die noch nicht betrachteten Fälle $b = 0$, $\omega = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gilt

$\omega\, S = S\omega'$ mit $\omega' = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Damit haben wir die Diagonalmatrizen ergänzt. Iteriert man nun über alle Repräsentanten $\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)$, so folgt die Aussage des Satzes. ∎

(4.13) KOROLLAR. *Für alle $n \geq 1$ sei*

$$\widetilde{T}_n \colon A \longrightarrow A, \quad \widetilde{T}_n =_{def.} \sum_{M \in \mathcal{M}(n)} M,$$

dann operiert $\widetilde{T}_n$ auf dem Periodenraum $W(A)$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, wobei die horizontalen Pfeile für den Isomorphismus 1.14 stehen:

$$\begin{tikzcd} Z_c^1(\Gamma, A) \arrow[r] \arrow[d, "T_n"'] & W(A) \arrow[d, "\widetilde{T}_n"] \\ Z_c^1(\Gamma, A) \arrow[r] & W(A) \end{tikzcd}$$

(4.14) LEMMA. *Sei $\omega = \Phi(\alpha)$ für $\alpha \in \mathcal{M}_A(n)$, dann gilt*

$$\big(S-1\big) \sum_{j=1}^{s+1} M_j = S\,\alpha - \omega + \sum_{j=1}^{s} \big(T^{-l_j} - 1\big)\, M_j,$$

wobei nach 4.7 und 4.8 die Matrizen

$$M_j = T^{l_j}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega, \quad (j = 1, \ldots, s+1)$$

alle zum Paar $(\alpha, \omega) \in \mathcal{M}_A(n) \times \mathcal{M}_\Omega(n)$ gehörenden reduzierten Matrizen durchläuft.

Beweis. Nach Definition ist $T^{l_j}\, S\, M_{j+1} = M_j$, also $S\, M_{j+1} = T^{-l_j}\, M_j$ und damit $S\, M_{j+1} - M_j = (T^{-l_j} - 1)\, M_j$. Wegen $M_1 = \alpha$, $M_{s+1} = \omega$ folgt nach Summation über $j = 1, \ldots, s$ die Aussage des Satzes:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{s}(T^{-l_j} - 1)\, M_j &= \sum_{j=1}^{s} S\, M_{j+1} - \sum_{j=1}^{s} M_j \\
&= \sum_{j=1}^{s} S\, M_{j+1} - \sum_{j=1}^{s} M_j + S\, M_1 - S\, M_1 + M_{s+1} - M_{s+1} \\
&= \sum_{j=1}^{s+1}(S\, M_j - M_j) - S\, M_1 + M_{s+1} \\
&= (S-1) \sum_{j=1}^{s+1} M_j - S\,\alpha + \omega.
\end{aligned}$$

■

(4.15) KOROLLAR. *Für jeden Bernoulli-Operator $B\colon A_\omega \to A$ gilt die folgende Gleichung:*

$$B\,(S-1) \sum_{j=1}^{s+1} M_j = B\,(S\,\alpha - \omega) - \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{l_j} T^{-i}\, M_j.$$

Beweis. Es ist $T^{-l_j} - 1 = -(T-1) \sum_{i=1}^{l_j} T^{-i}$ und folglich $B\,(T^{-l_j} - 1) = -B\,(T-1) \sum_{i=1}^{l_j} T^{-i} = -\sum_{i=1}^{l_j} T^{-i}$, also $B\,(S-1) \sum_{j=1}^{s+1} M_j = B\,(S\,\alpha - \omega) - \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{l_j} T^{-i}\, M_j$. ■

(4.16) *Definition.* Eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \Delta(n)$ heißt *semireduziert* genau dann, wenn $a, b, c, d > 0$ gilt. Die endliche Menge aller semireduzierten Matrizen M aus $\Delta(n)$ bezeichnen wir mit:

$$\overline{\mathcal{M}}(n).$$

Bemerkung. Die Endlichkeit von $\overline{\mathcal{M}}(n)$ folgt sofort aus $a, b, c, d > 0$ und $\det(M) = ad + bc = n$ für $M \in \overline{\mathcal{M}}(n)$.

(4.17) *Definition.* Sei $M \in \mathcal{M}(n)$ eine reduzierte Matrix. Nach 4.5 (ii) kann M zerlegt werden in der Form $M = T^{l_1}\, S \cdots T^{l_s}\, S\, \omega$, für genau ein $\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ und eindeutige Exponenten $l_1, \ldots, l_s \geq 2$. Es sei

$$k(M) =_{\text{def.}} \begin{cases} l_1\,(\geq 2), & M \notin \mathcal{M}_\Omega(n), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\mathfrak{S} =_{\text{def.}} \left\{ T^{-i}\, M \colon M \in M(n),\, 0 < i < k(M) \right\}.$$

(4.18) SATZ. *Die Linksmultiplikation mit* $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *induziert eine Bijektion von Mengen:* $\mathfrak{S} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(n)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Wohldefiniertheit der Abbildung. Dazu sei $M \in \mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_\Omega(n)$ und $0 < i < k(M)$, d. h. $M = T^{l_1}\, S \cdots T^{l_1}\, S\, \omega$ für $\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)$ und $l_1 = k(M)$. Es folgt $T^{-i}\, M = T^j\, S\, N$, wobei N aus $\mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_A(n)$ stammt und $j = k(M) - i$, also $0 < j < k(M)$ gilt. Demnach hat N die Gestalt $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $0 \leq c < a$ und $0 < b < d$. Weitherin gilt

$$M = T^{k(M)}\, S\, N = \begin{pmatrix} k(M)\, a - c & k(M)\, b - d \\ a & b \end{pmatrix},$$

woraus wir, da M reduziert ist,

$$0 \leq k(M)\, b - d < b \Longleftrightarrow \frac{d}{b} \leq k(M) < \frac{d}{b} + 1$$

ablesen können. Es folgt

$$0 < j \leq k(M) - 1 < \frac{d}{b},$$

also

$$j\, b - d < 0$$

und wegen $c - a < 0$ und $0 < j < k(M)$

$$c - j\,a < 0.$$

Daher ist die Matrix

$$S^{-1}\,T^{-i}\,M = S^{-1}\,T^{j}\,S\,N = \begin{pmatrix} a & b \\ c - j\,a & d - j\,b \end{pmatrix}$$

semireduziert.

Im nächsten Schritt müssen wir zeigen, daß zu gegebener semireduzierter Matrix $N \in \overline{\mathcal{M}}(n)$ stets genau eine reduzierte Matrix $M \in \mathcal{M}(n)$ und genau eine Zahl $i \in \mathbb{Z}$ mit $0 < i < k(M)$ existiert, so daß $T^{-i}\,M = S\,N$ gilt. Nach Definition ist $N = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d > 0$. Die Matrix

$$M' =_{\text{def.}} S^{-1}\,T^{-j}\,S\,N = \begin{pmatrix} a & b \\ ja - c & jb + d \end{pmatrix}$$

ist genau dann reduziert, wenn $0 \le ja - c < a$ und $0 \le b < jb + d$ gilt. Die letzten beiden Ungleichungen sind für alle $j > 0$ erfüllt. Die ersten beiden Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{c}{a} \le j < \frac{c}{a} + 1$. Daher ist M' für genau ein $j > 0$ reduziert. Wegen $b > 0$ können wir 4.4 anwenden, d. h. es existiert eine eindeutig bestimmte reduzierte Matrix M und ein eindeutig bestimmter Exponent $k = k(M) = N > 1$ mit:

$$M = \text{def.} = T^{N}\,S\,M' = \begin{pmatrix} ka - ja + c & kb - jb - d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Es folgt $0 \le kb - jb - d < b$ oder äquivalent $\frac{jb+d}{b} \le k(M) < \frac{jb+d}{b} + 1$. Weiter lesen wir $0 \le a < ka - ja + c$ ab, was $\frac{c}{a} + 1 + j < k$ impliziert. Wegen $j < \frac{c}{a} + 1$ gilt $0 < j < k(M)$. Wir setzen noch $i =_{\text{def.}} k(M) - j$, dann erhalten wir die Aussage des Satzes leicht, wie die folgende kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} S^{-1}\,T^{-i}\,M &= S^{-1}\,T^{j-k(M)}\,T^{k(M)}\,S\,M' \\ &= S^{-1}\,T^{j-k(M)}\,T^{k(M)}\,S\,S^{-1}\,T^{-j}\,S\,N \\ &= N. \end{aligned}$$

■

(4.19) KOROLLAR. *Die inverse Bijektion* $\overline{\mathcal{M}}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}$ *wird induziert durch die Linksmultiplikation mit* $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Sei*

$$\overline{T}_n =_{def.} \sum_{\overline{M}\in\overline{\mathcal{M}}(n)} \overline{M}, \tag{4.20}$$

dann gilt

$$S\,\overline{T}_n = \sum_{\overline{M}\in\overline{\mathcal{M}}(n)} S\,\overline{M} = \sum_{M\in\mathfrak{S}} M. \tag{4.21}$$

(4.22) *Definition.* Für $n \geq 1$ sei

$$\widetilde{T}_n^\alpha =_{\text{def.}} \sum_{\alpha\in\mathcal{M}_A(n)} \alpha, \quad \widetilde{T}_n^\omega =_{\text{def.}} \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \omega, \quad D_n =_{\text{def.}} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

(4.23) SATZ. *Sei* $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ *ein beliebiger Bernoulli-Operator und* $n \geq 1$. *Dann ist der lineare Operator* $p_B\,\widetilde{T}_n$ *auf* A_{cc} *gegeben durch:*

$$\begin{aligned} p_B\,\widetilde{T}_n = \left(T - T^{-1}\right)\left(S-1\right) B \left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) + \\ + \left(T - T^{-1}\right)\left(S-1\right)\left(\overline{T}_n - \widetilde{T}_n^\alpha\right) : A_{cc} \longrightarrow W(A). \end{aligned}$$

Beweis. Aufgrund von 4.5 und 4.6 können wir die Menge der reduzierten Matrizen $\mathcal{M}(n)$ auffassen als disjunkte Vereinigung aller Teilmengen $\mathcal{M}_{(\alpha,\omega)}(n)$ jener reduzierten Matrizen, die zu einem beliebig fixierten, in Bijektion stehenden Paar $(\alpha,\omega) \in \mathcal{M}_A(n) \times \mathcal{M}_\Omega(n)$ gehören ($\Phi(\alpha) = \omega$), d. h.

$$\mathcal{M}_{(\alpha,\omega)}(n) = \left\{ M_j^{(\alpha,\omega)} \in \mathcal{M}(n)\colon\ j = 1,\ldots,l_\omega + 1,\ M_j^{(\alpha,\omega)} \text{ gehört zu } (\alpha,\omega) \right\}$$

und (disjunkte Vereinigung)

$$\mathcal{M}(n) = \bigsqcup_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \mathcal{M}_{(\alpha,\omega)}(n).$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung finden wir:

$$\begin{aligned}
B\ (S-1)\ \widetilde{T}_n &= B\ (S-1) \sum_{M\in\mathcal{M}(n)} M \\
&= B\ (S-1) \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega+1} M_j^{(\alpha,\omega)} \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} B\ (S-1) \sum_{j=1}^{l_\omega+1} M_j^{(\alpha,\omega)} \\
&\overset{(4.15)}{=} \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \left(B\ \left(S\,\Phi^{-1}(\omega) - \omega\right) - \sum_{j=1}^{l_\omega} \sum_{i=1}^{k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)} T^{-i}\, M_j^{(\alpha,\omega)} \right) \\
&= B\ \left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) - \sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega} \sum_{i=1}^{k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)} T^{-i}\, M_j^{(\alpha,\omega)}.
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun den rechten Summanden weiter, es gilt:

$$\sum_{\omega\in\mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\Omega} \sum_{i=1}^{k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)} T^{-i}\, M_j^{(\alpha,\omega)} =$$

$$= \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega} \sum_{i=1}^{k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)-1} T^{-i}\, M_j^{(\alpha,\omega)} + \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega} T^{-k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)}\, M_j^{(\alpha,\omega)}.$$

Aus 4.19 folgt, daß der linke Summand des letzten Ausdrucks identisch $\sum_{\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)} S\,\overline{M}$ ist. Für den rechten Summanden desselben Ausdrucks gilt:

$$\sum_{\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega} T^{-k\left(M_j^{(\alpha,\omega)}\right)}\, M_j^{(\alpha,\omega)} =$$

$$= \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=1}^{l_\omega} S\, M_{j+1}^{(\alpha,\omega)} = S \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\Omega(n)} \sum_{j=2}^{l_\omega+1} M_j^{(\alpha,\omega)} = \sum_{M \in \mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_A(n)} S\, M.$$

Insgesamt haben wir somit folgende Identität gezeigt:

$$B\;(S-1)\;\widetilde{T}_n = B\,\left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) - \sum_{\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)} S\,\overline{M} - \sum_{M \in \mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_A(n)} S\, M.$$

Wegen

$$\frac{1}{2}\,(S-1)\,\widetilde{T}_n + \frac{1}{2}\,(S+1)\,\widetilde{T}_n = \sum_{M \in \mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_A(n)} S\, M + S\,\widetilde{T}_n^\alpha$$

(auf beiden Seiten steht $S\,\widetilde{T}_n$) folgt:

$$\left(B + \frac{1}{2}\right)\;(S-1)\;\widetilde{T}_n =$$

$$= B\,\left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) - \sum_{\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)} S\,\overline{M} + \frac{1}{2}\;(S-1)\;\widetilde{T}_n - \sum_{M \in \mathcal{M}(n) \setminus \mathcal{M}_A(n)} S\, M$$

$$= B\,\left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) - \sum_{\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)} S\,\overline{M} + S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \frac{1}{2}\;(S+1)\;\widetilde{T}_n$$

$$= B\,\left(S\,\widetilde{T}_n^\alpha - \widetilde{T}_n^\omega\right) - S\,\left(\sum_{\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)} \overline{M} - \widetilde{T}_n^\alpha\right) - \frac{1}{2}\;(S+1)\;\widetilde{T}_n$$

Multiplikation von links mit $(T - T^{-1})\,(S-1)$ ergibt die Aussage des Satzes, wobei wir ausgenutzt haben, daß S und $S^{-1} = -S$ identisch auf A operieren und $S^2 = -1$ als

Identität auf A operiert, also $(S-1)\,S = S^2 - S = 1 - S = -(S-1)$ gilt. Der letzte Summand verschwindet wegen $(S-1)\,(S+1) = 0$. ■

Wir geben noch eine Variante des Satzes an.

(4.24) SATZ. *Unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes gilt:*

$$p_B\,\widetilde{T}_n = \left(T - T^{-1}\right)\left(S-1\right)\left(B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,(S-1) + \overline{T}_n + D_n\,S\right) : A_{cc} \longrightarrow W(A).$$

Beweis. Für beliebiges $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_A(n)$ ist $T\,S \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a-c \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
S\,\widetilde{T}_n^{\alpha} &= \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le c<a}} S \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1}\left(\sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le c<a}} \begin{pmatrix} d & a-c \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) S \\
&= T^{-1}\left(\sum_{\substack{ad=n,\\ 0<c<a}} \begin{pmatrix} d & a-c \\ 0 & a \end{pmatrix} + \sum_{\substack{ad=n,\\ a>0}} \begin{pmatrix} d & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) S \\
&= T^{-1}\left(\widetilde{T}_n^{\omega} - D_n + \sum_{\substack{ad=n,\\ a>0}} \begin{pmatrix} d & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) S \\
&= T^{-1}\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,S - T^{-1}\,D_n\,S + \left(\sum_{\substack{ad=n,\\ a>0}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) S \\
&= T^{-1}\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,S - T^{-1}\,D_n\,S + \left(\sum_{\substack{ad=n,\\ a>0}} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) S \\
&= T^{-1}\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,S + \left(1 - T^{-1}\right)\,D_n\,S.
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $C_n =_{\text{def.}} \left(1 - T^{-1}\right)\,D_n\,S$, dann gilt $S\,\widetilde{T}_n^{\alpha} = T^{-1}\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,S + C_n$. Nach Definition des Bernoulli-Operators B operiert $B\,(T-1)\colon A_\omega \longrightarrow A_\omega$ als Identität.

Wir erhalten $T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S = B\;(T-1)\;T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S = (B\,T - B)\;T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S = B\,T\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S - B\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S = B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S - B\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S$ bzw.

$$B\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S = B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S - T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S$$

sowie $(B+1)\;C_n = (B+1)\;\big(1-T^{-1}\big)\;D_n\,S = B\;(T-1)\;T^{-1}\,D_n\,S + \big(1-T^{-1}\big)\;D_n\,S = D_n\,S$, also

$$(B+1)\;C_n = D_n\,S.$$

Die Aussage des Satzes gewinnen wir nun durch schrittweises Ersetzen der Terme in Formel 4.23, beginnend mit $S\,\widetilde{T}_n^\alpha$:

$$\begin{aligned} p_B\,\widetilde{T}_n &= \big(T-T^{-1}\big)\;(S-1)\;\Big(B\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S + B\,C_n - B\,\widetilde{T}_n^\omega + \overline{T}_n - \widetilde{T}_n^\alpha\Big) \\ &= \big(T-T^{-1}\big)\;(S-1)\;\Big(B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S - T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\,S + B\,C_n - B\,\widetilde{T}_n^\omega + \overline{T}_n + S\,\widetilde{T}_n^\alpha\Big) \\ &= \big(T-T^{-1}\big)\;(S-1)\;\big(B\,\widetilde{T}_n^\omega\;(S-1) + \overline{T}_n + (B+1)\;C_n\big). \end{aligned}$$

Für den zweiten Schritt haben wir zusätzlich ausgenutzt, daß $S^2 = -1$ trivial auf A operiert, was $(S-1)\,S\,\widetilde{T}_n^\alpha = (S^2-S)\,\widetilde{T}_n^\alpha = (1-S)\,\widetilde{T}_n^\alpha = (S-1)\,(-\widetilde{T}_n^\alpha)$ impliziert. ■

§3. Abstrakte Spurformeln

Wir wollen 4.23 und 4.24 anwenden, um die Spur von $\widetilde{T}_n$ auf dem Periodenraum $W(A)$ bzw. auf $W(A)^+$ zu berechnen.

LEMMA. *Für jedes $a \in A_\alpha = \ker(T-1)$ gilt $a\Big|\big(S-1\big) \in W(A)$.*

Beweis. Folgt sofort aus $(S-1)\,(S+1) = S^2 + S - S - 1 = 0$ und

$$\begin{aligned} (S-1)\;\big(1 + T\,S + (T\,S)^2\big) &= \big(S + S\,T\,S + S\,T\,S\,T\,S - 1 - T\,S - T\,S\,T\,S\big) \\ &= \big(S + S\,T\,S + T^{-1} - 1 - T\,S - T\,S\,T\,S\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(S + S\,T\,S + 1 - 1 - S - S\,T\,S\big)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei $S\,T\,S\,T\,S = T^{-1}$ nach Voraussetzung trivial auf A_α operiert, denn $a = a\Big|T\,T^{-1} = a\Big|T^{-1}$. ■

KOROLLAR. *Der Operator* $\big(1+T^{-1}\big)\,\lambda_B\,\big(S-1\big)$ *bildet nach* $W(A)$ *ab, wobei* $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ *ein beliebiger Bernoulli-Operator ist.*

Beweis. $\lambda_B\colon A \longrightarrow A_\alpha = \ker(T-1)$. ■

(4.25) SATZ. *Für jedes* $n \geq 1$ *und jeden Bernoulli-Operator* $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ *gilt:*

$$
\operatorname{Tr}\Big(p_B\,\widetilde{T}_n;\,A_{cc}\Big) = 6\cdot\operatorname{Tr}\Big(\widetilde{T}_n;\,W(A)\Big) - 2\cdot\operatorname{Tr}\Big(\big(1+T^{-1}\big)\,\lambda_B\,\big(S-1\big)\,\widetilde{T}_n;\,W(A)\Big)\,.
$$

Beweis. Folgt sofort aus 1.35. ■

(4.26) SATZ. *Sei* $k \geq 2$ *gerade und* $A = V_{k-2}(K)$ *der* K*-Vektorraum aller Polynome des maximalen Grades* $k-2$ *mit der Aktion auf Polynomen wie aus Kapitel 1. Sei* $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ *ein beliebiger Bernoulli-Operator mit der Eigenschaft* $\varepsilon\,\big(B+\frac{1}{2}\big) = -\big(B+\frac{1}{2}\big)\,\varepsilon$. *Dann ist der Operator* $p_B^+ =_{def.}= (1+\varepsilon)\,p_B$ *auf* A *definiert, bildet in den Raum* $W^+(A) =_{def.} W(A)^+$ *ab und für jedes* $n \geq 1$ *gilt:*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\Big(p_B^+\,\widetilde{T}_n;\,A\Big) &= 12\cdot\operatorname{Tr}\Big(\widetilde{T}_n;\,W^+(A)\Big)\\
&\qquad - 2\cdot\operatorname{Tr}\Big((1+\varepsilon)\,\big(1+T^{-1}\big)\,\lambda_B\,\big(S-1\big)\,\widetilde{T}_n;\,W^+(A)\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach Definition ist $A^+ = \ker(1-\varepsilon) = \operatorname{im}(1+\varepsilon)$ und $X^j\Big|(1+\varepsilon) = X^j + (-1)^j\,X^j = 2\cdot X^j$ für j gerade und 0 sonst. Wegen 2.1 gilt daher $A^+ = \operatorname{im}(1+\varepsilon) \subset A_{cc}^+$. Die Aussage folgt dann aus 1.41. ■

Kapitel 5:

Spuren von Heckeoperatoren

Ziel dieses Kapitels ist die Rekonstruktion der Spurformel der Heckoperatoren in [32, Theorem 1], die für die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und beliebiges gerades Gewicht $k \geq 2$ formuliert wurde. Dabei werden wir ausschließlich die algebraischen Methoden der vorangegangenen Kapitel verwenden. Im gesamten Kapitel sei $K = \mathbb{C}$ und $k \geq 2$ eine positive gerade ganze Zahl sowie $w = k - 2$. Weiterhin betrachten wir den $\mathbb{C}[\Gamma]$-Modul $A = A_w = A_{k-2} = V_{k-2}(\mathbb{C})$ zur vollen Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$ aus Kapitel 2. Nach dem Eichler-Shimura-Isomorphismus gilt dann $\mathscr{S}_k(\Gamma) \oplus \mathscr{M}_k(\Gamma) \cong W^-(A) \oplus W^+(A)$, wobei $\mathscr{M}_k(\Gamma) \cong W^+(A)$ und $\mathscr{S}_k(\Gamma) \cong W^-(A)$. Der Isomorphismus ist kompatibel mit der Aktion der Hecke-Algebra.

§1. Grundlagen und Organisation der Spurformel

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, sind die Voraussetzungen von 4.26 erfüllt. Die abstrakte Spurformel hat unter diesen Voraussetzungen die Gestalt ($w \geq 0$):

$$\begin{aligned} 12 \cdot \mathrm{Tr}\left(\widetilde{T}_n;\, W^+(A_w)\right) = \mathrm{Tr}\left(p_B^+\, \widetilde{T}_n;\, A_w\right) + \\ 2 \cdot \mathrm{Tr}\left(\left(1+\varepsilon\right)\left(1+T^{-1}\right)\lambda_B\left(S-1\right)\widetilde{T}_n;\, W^+(A_w)\right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wir unterdrücken den Index w in A_w $(w = k-2)$ und schreiben stattdessen kurz A, immer dann, wenn dies zu keinen Mißverständnissen führt.

(5.2) LEMMA. *Die Spur des Fehlerterms ist für alle $w \geq 0$ gegeben durch:*

$$\mathrm{Tr}\Big((1+\varepsilon)\left(1+T^{-1}\right)\lambda_B\left(S-1\right)\widetilde{T}_n;\, W^+(A_w)\Big) = \frac{4\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n),$$

wobei

$$\sigma_{w+1}(n) =_{def.} \sum_{\substack{d>0,\\ d|n}} d^{w+1}.$$

Beweis. Für $j \geq 0$ ist $X^j\Big|\varepsilon = (-1)^j X^j$ und somit $(X^w - 1)\Big|(1+\varepsilon) = 2\,(X^w-1)$, da w gerade ist. Analog zum Beweis von 2.4 folgt $(X^w-1)\Big|(1+\varepsilon)\left(1+T^{-1}\right)\lambda_B\left(S-1\right) = 2\,\frac{2\,w}{w+1}\,(X^w-1) = \frac{4\,w}{w+1}\,(X^w-1)$. Wir wollen nun die Aktion von $\widetilde{T}_n = \sum_{M\in\mathcal{M}(n)}\colon A \longrightarrow A$ auf dem eindimensionalen Raum $\mathbb{C}\cdot(X^w-1)$ untersuchen. Dazu müssen wir über alle reduzierten Matrizen summieren. Für jedes in Bijektion stehende Paar $(\alpha,\omega)\in\mathcal{M}_A(n)\times\mathcal{M}_\Omega(n)$ mit $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0\\ c & d\end{pmatrix}$ und $\omega = \begin{pmatrix} a^* & b^*\\ 0 & d^*\end{pmatrix}$ gilt nach 4.14: $(X^w-1)\Big|\sum_{j=1}^{s+1} M_j = 1\Big|(S-1)\sum_{j=1}^{s+1} M_j = 1\Big|\left(S\,\alpha - \omega + \sum_{j=1}^{s}\left(T^{-l_j}-1\right)M_j\right) = 1\Big|(S\,\alpha-\omega)$, wobei die Matrizen M_j für $j = 1,\ldots,s+1$ alle zum Paar (α,ω) gehörenden reduzierten Matrizen durchlaufen. Die letzte Gleichung folgt wegen $1\Big|T^m = 1\Big|\begin{pmatrix} 1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$ für beliebiges $m\in\mathbb{Z}$. Weiterhin gilt $1\Big|S\,\alpha = X^w\Big|\begin{pmatrix} a & 0\\ c & d\end{pmatrix} = \frac{(a\,X)^w}{(c\,X+d)^w}\,(c\,X+d)^w = a^w\,X^w$ und $1\Big|\omega = 1\Big|\begin{pmatrix} a^* & b^*\\ 0 & d^*\end{pmatrix} = \left(\frac{a^*\,X+b^*}{d^*}\right)^0 (d^*)^w = (d^*)^w$. Für festes $a>0$ sind alle reduzierten Matrizen aus $\mathcal{M}_A(n)$ durch $\begin{pmatrix} a & 0\\ c & d\end{pmatrix}$ für $0\leq c<a$ und $a\,d = n$ gegeben. Die Anzahl ist demzufolge $a = \#\{0\leq c<a\}$. Analog gibt es für festes $d^*>0$ genau d^* reduzierte Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a^* & b^*\\ 0 & d^*\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_\Omega(n)$. Summiert man über alle reduzierten Matrizen, so kommt der Term $a^w\,X^w$ genau a mal, und der Term $(d^*)^w$ genau d^* mal vor. Es folgt die Aussage des Satzes, denn

$$\begin{aligned}(X^w - 1)\Big|\widetilde{T}_n &= \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} a^{w+1}\, X^w - \sum_{\substack{a^*d^*=n,\\ a^*,d^*>0}} (d^*)^{w+1} = \\ &= \sigma_{w+1}(n)\, X^w - \sigma_{w+1}(n) = \sigma_{w+1}(n)\, \big(X^w - 1\big).\end{aligned} \tag{5.3}$$

■

Nachdem wir den Spuranteil des Fehlerterms berechnet haben, betrachten wir den Operator $p_B^+ \widetilde{T}_n = (1+\varepsilon)\, p_B\, \widetilde{T}_n$. Diesen zerlegen wir gemäß 4.24 in die folgende Summe von Operatoren:

$$p_B^+ \widetilde{T}_n = E_1 + E_2 + P \tag{5.4}$$

mit

$$E_1 =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\, \big(T - T^{-1}\big)\, (S-1)\, \overline{T}_n, \tag{5.5}$$

$$E_2 =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\, \big(T - T^{-1}\big)\, (S-1)\, D_n\, S, \tag{5.6}$$

$$P =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\, \big(T - T^{-1}\big)\, (S-1)\, B\, \widetilde{T}_n^{\omega}\, (S-1)\,. \tag{5.7}$$

(Zur Vereinfachung lassen wir jeweils den Index n, der den n-ten Heckeoperator markiert, weg.)

Die Berechnung der Spuren von E_1 und E_2 ist *elementar*, die des Operators P *nichtelementar*. Beide Fälle betrachten wir getrennt in den nächsten Unterabschnitten.

Wir organisieren die Spur wie in [32] (vgl. auch [25, S. 3]) als Potenzreihe.

(5.8) SATZ. *Für jede Matrix* $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ *gilt:*

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{w=0,\\ w\ \text{gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(M;\, A_w)\cdot Y^w = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\cdot\Big(\big(1 - \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2\big)^{-1} + \big(1 + \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2\big)^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Beweis. Da M regulär und die Spur invariant unter Koordinatentransformationen ist, können wir M auffassen als $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, wobei $\lambda, \mu \neq 0$ die beiden Eigenwerte von M sind. Für die Aktion von M auf der Monomen-Basis von A gilt $X^r \Big| M = (\lambda\, X)^r\ \mu^{w-r} = \lambda^r\, \mu^{w-r}\, X^r$ für $0 \leq r \leq w$. Daher ist $\lambda^r\, \mu^{w-r}$ der X^r-Eigenwert der Aktion von M auf A, also $\mathrm{Tr}\,(M;\ A) = \sum_{r=0}^{w} \lambda^r\, \mu^{w-r}$. Wegen $\mathrm{Tr}\,(M) = \lambda + \mu$ und $\det(M) = \lambda \cdot \mu$ gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2} &= \frac{1}{(1-\lambda\cdot Y)}\,\frac{1}{(1-\mu\cdot Y)}, \\ \frac{1}{1 + \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2} &= \frac{1}{(1+\lambda\cdot Y)}\,\frac{1}{(1+\mu\cdot Y)}. \end{aligned}$$

Wendet man die formale geometrische Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{w=0}^{\infty} q^w$ (Beachte: $(1-q)\sum_{w=0}^{\infty} q^w = \sum_{w=0}^{\infty} q^w - \sum_{w=1}^{\infty} q^w = q^0 = 1$) auf die vier Faktoren der rechten Seiten an und addiert diese anschließend, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2} + \frac{1}{1 + \mathrm{Tr}(M)\cdot Y + \det(M)\cdot Y^2} = \\ &\qquad = \sum_{w=0}^{\infty}\left(\sum_{m+n=w} \lambda^m\, \mu^n \cdot Y^{m+n} + \sum_{m+n=w} (-\lambda)^m\,(-\mu)^n \cdot Y^{m+n}\right). \end{aligned}$$

Für ungerades w heben sich die inneren Summanden weg, für gerades w sind die inneren Summanden identisch. Daher können wir die rechte Seite der letzten Gleichung wie folgt aufschreiben:

$$2 \cdot \left(\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} Y^w \cdot \left(\sum_{m+n=w} \lambda^m\, \mu^n\right)\right).$$

Die Aussage folgt dann aus der Tatsache, daß $\sum_{m+n=w} \lambda^m\, \mu^n = \mathrm{Tr}\,(M;\ A)$ gilt. ■

Rechenregeln.

- Ist $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ und sind $\pm\lambda \neq 0$ die beiden Eigenwerte von M, dann gilt $\mathrm{Tr}\,(M;\ A_w) = \sum_{r=0}^{w} \lambda^r\,(-\lambda)^{w-r} = \sum_{r=0}^{w}(-1)^{w-r}\,\lambda^w = 0$, da w gerade ist.

- Aus $\mathrm{Tr}\,(M) = \mathrm{Tr}\,(M')$ und $\det(M) = \det(M')$ folgt $\mathrm{Tr}\,(M - M';\, A_w) = 0$, wobei $M - M'$ als Element von $\mathbb{C}[\Gamma]$ aufzufassen ist ($M - M' = M -_{\mathbb{C}[\Gamma]} M'$).

- Für jede Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Tr}\,(c \cdot M;\, A_w) = c \cdot \mathrm{Tr}\,(M;\, A_w)$.

(5.9) KOROLLAR. *Für jedes $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(p_B^+ \widetilde{T}_n^w;\, A_w\right) \cdot Y^w =$$

$$= \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(E_1;\, A_w) \cdot Y^w + \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(E_2;\, A_w) \cdot Y^w + \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(P;\, A_w) \cdot Y^w.$$

§2. Der elementare Spuranteil

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Spurbeiträge der beiden elementaren Operatoren E_1 und E_2.

(5.10) LEMMA. (E_1-Operator) *Für jedes $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(E_1;\, A_w) \cdot Y^w = -\sum_{\substack{ad>0>bc,\\ ad-bc=n}} \mathrm{sgn}(c\,d) \cdot \Big(1 - (a+d-c) \cdot Y + n \cdot Y^2\Big)^{-1}.$$

Beweis. Es ist $E_1 = (1+\varepsilon)\,\big(T - T^{-1}\big)\,(S-1) \sum \overline{M} = (1+\varepsilon)\,\big(\sum T\,S\,\overline{M} - \sum T\,\overline{M}\big) + \big(\sum T^{-1}\,\overline{M} - \sum T^{-1}\,S\overline{M}\big)$, da $\overline{T}_n = \sum \overline{M}$. Die Summe ist dabei über alle semireduzierten Matrizen $\overline{M} \in \overline{\mathcal{M}}(n)$ zu bilden. Sei $\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{M}}(n)$ beliebig fixiert, dann ist $a, b, c, d > 0$, $ad + bc = n$ und

$$T\,\overline{M} = \begin{pmatrix} a-c & b+d \\ -c & d \end{pmatrix}, \quad T^{-1}\,\overline{M} = \begin{pmatrix} a+c & b-d \\ -c & d \end{pmatrix},$$

$$T\,S\,\overline{M} = \begin{pmatrix} a+c & b-d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad T^{-1}\,S\,\overline{M} = \begin{pmatrix} c-a & -b-d \\ a & b \end{pmatrix}$$

sowie

$$\varepsilon\,T\,\overline{M} = \begin{pmatrix} c-a & -b-d \\ -c & d \end{pmatrix}, \quad \varepsilon\,T^{-1}\,\overline{M} = \begin{pmatrix} -a-c & d-b \\ -c & d \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon\,T\,S\,\overline{M} = \begin{pmatrix} -a-c & d-b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \varepsilon\,T^{-1}\,S\,\overline{M} = \begin{pmatrix} a-c & b+d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Der Operator $\overline{T}_n = \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \overline{M}$ ist invariant unter Permutationen der Einträge a, b, c, d, die die Determinante invariant lassen. Z. B. erfüllt die Substitution $(a, b, c, d) \longmapsto (c, d, a, b)$ diese Bedingung, denn $ad + bc = n$ impliziert $cb + da = n$. Neben Permutationen benutzen wir Substitutionen der Form $(a, b, c, d) \longmapsto (a, -b, -c, d)$. In diesem Fall muß dann die Summation über alle $b, c > 0$ zu $b, c < 0$ geändert werden. Mit Hilfe dieser beiden Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum T\,S\,\overline{M} - \sum T\,\overline{M} &= \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a+c & b-d \\ a & b \end{pmatrix} - \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a-c & b+d \\ -c & d \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ c & d \end{pmatrix} - \sum_{\substack{a,d>0,\\ b,c<0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ bc>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum T^{-1}\,\overline{M} - \sum T^{-1}\,S\overline{M} &= \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a+c & b-d \\ -c & d \end{pmatrix} - \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} c-a & -b-d \\ a & b \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ b,c<0\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a-c & -b-d \\ c & d \end{pmatrix} - \sum_{\substack{a,d,b,c>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a-c & -b-d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{a,d>0,\\ bc>0,\\ ad+bc=n}} \big(-\operatorname{sgn}(c)\big)\cdot \begin{pmatrix} a-c & -b-d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Im letzten Schritt haben wir jeweils $b, c < 0$ und $b, c > 0$ zu $b \cdot c > 0$ zusammengefaßt und das Vorzeichen durch die sgn-Funktion ausgedrückt. Für die Summe der Differenzen $\mathcal{T} =_{\text{def.}} \big(\sum T\,S\,\overline{M} - \sum T\,\overline{M}\big) + \big(\sum T^{-1}\,\overline{M} - \sum T^{-1}\,S\overline{M}\big) \in \mathbb{C}[\Gamma]$ folgt somit:

$$\mathcal{T} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ bc>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot \left[\begin{pmatrix} a+c & d-b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-c & -b-d \\ c & d \end{pmatrix}\right].$$

Die erzeugende Funktion aus 5.8 angewendet auf $\mathcal{T}$ hat die Gestalt:

$$\mathfrak{S} =_{\text{def.}} \sum_{\substack{w=0\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(\mathcal{T};\, A)\cdot Y^w =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1}\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1}\Big).$$

Durch Umordnen der vier Summanden der rechten Seite erhalten wir außerdem:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$$

für

$$\mathfrak{S}_1 =_{\text{def.}} \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} - \big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1}\Big),$$

$$\mathfrak{S}_2 =_{\text{def.}} \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1+(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} - \big(1+(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1}\Big).$$

Wir werden nun durch einfache Manipulationen jeweils die beiden Summanden in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zusammenfassen.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \Big(\big(1-(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} - \big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} \Big) \\
&= - \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \Big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\Big)^{-1} \\
&= - \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c\,d) \cdot \Big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\Big)^{-1}
\end{aligned}$$

(Im ersten Summanden haben wir c durch $-c$ ersetzt, was $b \cdot c < 0$, $ad - bc = n$ und $-\operatorname{sgn}(c)$ zur Folge hat. Auf den zweiten Summanden haben wir die Ersetzung $b \longmapsto -b$ angewendet, was $b \cdot c < 0$ und $ad - bc = n$ impliziert. Der letzte Schritt ist trivial, da $\operatorname{sgn}(d) > 0$ ist.)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \Big(\big(1+(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} - \big(1+(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,d<0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \Big(\big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} - \big(1-(a+d+c)\,Y+n\,Y^2\big)^{-1} \Big) \\
&= \sum_{\substack{a,d<0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c) \cdot \Big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\Big)^{-1} \\
&= - \sum_{\substack{a,d<0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c\,d) \cdot \Big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

(Die erste Transformation ist $(a, d) \longmapsto (-a, -d)$, was insbesondere $a, d < 0$ zu Folge hat. Alle weiteren Transformationen sind analog zu denen, die wir im Fall $\mathfrak{S}_1$ benutzt haben.) Das Resultat ist:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = -\sum_{\substack{a\cdot d>0>b\cdot c,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c\,d)\cdot\Big(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\Big)^{-1}.$$

Im letzten Schritt müssen wir noch den ε-Anteil des Operators E_1 betrachten. Dieser ist, aufgrund von $\varepsilon\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b\\ c & d\end{pmatrix}$, gegeben durch:

$$\mathcal{T}_\varepsilon =_{\text{def.}} \varepsilon\,\mathcal{T} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ bc>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\left[\begin{pmatrix} -a-c & b-d\\ c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c-a & b+d\\ c & d\end{pmatrix}\right].$$

Analog zum Fall $\mathcal{T}$ ergibt 5.8 auf $\mathcal{T}_\varepsilon$ angewendet, wobei $\det(\varepsilon)=-1$ zu beachten ist:

$$\mathfrak{S}_\varepsilon =_{\text{def.}} \sum_{\substack{w=0\\ w\text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(\mathcal{T}_\varepsilon;\,A)\cdot Y^w =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(-a-c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}+\big(1+(-a-c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(-a+c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}+\big(1+(-a+c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}\Big),$$

und dann

$$\mathfrak{S}_\varepsilon = \mathfrak{S}_{\varepsilon,1} + \mathfrak{S}_{\varepsilon,2}$$

für

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon,1} =_{\text{def.}} \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1-(-a-c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}-\big(1-(-a+c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}\Big)$$

und

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon,2} =_{\text{def.}} \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c>0,\\ ad+bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\Big(\big(1+(-a-c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}-\big(1+(-a+c+d)\,Y-n\,Y^2\big)^{-1}\Big).$$

Wir wenden nun die Ersetzung $c \longmapsto -c$ auf den ersten Summanden in $\mathfrak{S}_{\varepsilon,2}$ und den zweiten Summanden in $\mathfrak{S}_{\varepsilon,1}$ sowie die Ersetzung $b \longmapsto -b$ auf den ersten Summanden in $\mathfrak{S}_{\varepsilon,1}$ und den zweiten Summanden in $\mathfrak{S}_{\varepsilon,2}$ an. Dadurch ändern sich in allen Summationen $bc > 0$ zu $bc < 0$ und $ad + bc = n$ zu $ad - bc = n$. Im Fall der Ersetzung $c \longmapsto -c$ muß außerdem jeweils $\operatorname{sgn}(c)$ durch $-\operatorname{sgn}(c)$ ersetzt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\varepsilon,1} &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\bigl(1-(-a-c+d)\,Y-n\,Y^2\bigr)\\ &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\bigl(1+(a+c-d)\,Y-n\,Y^2\bigr)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\varepsilon,2} &= -\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\bigl(1+(-a+c+d)\,Y-n\,Y^2\bigr)\\ &= -\sum_{\substack{a,d>0,\\ b\cdot c<0,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c)\cdot\bigl(1+(a+c-d)\,Y-n\,Y^2\bigr)\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung gilt aufgrund der Symmetrie $a \longleftrightarrow d$.)

Es folgt

$$\mathfrak{S}_\varepsilon = \mathfrak{S}_{\varepsilon,1} + \mathfrak{S}_{\varepsilon,2} = 0$$

und damit die Aussage des Satzes

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(E_1;\, A)\cdot Y^w = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}_\varepsilon = \mathfrak{S}.$$

■

(5.11) LEMMA. (E_2-Operator) *Für jedes $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(E_2;\, A_w) \cdot Y^w = 0.$$

Beweis. Seien $n \geq 1$ und $a, d > 0$ mit $a\,d = n$ beliebig fixiert. Aufgrund der Beschaffenheit des Operators E_2 müssen wir Matrizen der Form

$$M =_{\text{def.}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

betrachten. Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)\ \left(T - T^{-1}\right)\ (S-1)\ M = \\ &= (1+\varepsilon)\ \left(T - T^{-1}\right)\ (S\,M - M) \\ &= (1+\varepsilon)\ \left(T\,S\,M - T\,M - T^{-1}\,S\,M + T^{-1}\,M\right) \\ &= T\,S\,M - T\,M - T^{-1}\,S\,M + T^{-1}\,M + \\ &\qquad + \varepsilon\,T\,S\,M - \varepsilon\,T\,M - \varepsilon\,T^{-1}\,S\,M + \varepsilon\,T^{-1}\,M. \end{aligned}$$

Die acht Summanden aus $\mathbb{C}[\Gamma]$ sind gegeben durch $T\,S\,M = \begin{pmatrix} -d & -a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $T\,M = \begin{pmatrix} d & -a \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\,S\,M = \begin{pmatrix} -d & a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $T^{-1}\,M = \begin{pmatrix} -d & -a \\ d & 0 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon\,T\,S\,M = \begin{pmatrix} d & a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\varepsilon\,T\,M = \begin{pmatrix} -d & a \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon\,T^{-1}\,S\,M = \begin{pmatrix} d & -a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\varepsilon\,T^{-1}\,M = \begin{pmatrix} d & a \\ d & 0 \end{pmatrix}$. Da $-I$ trivial auf A operiert, folgt

$$\begin{aligned} E_2 = \sum_{\substack{a,d>0,\\ a\,d=n}} \Bigg[&\begin{pmatrix} d & a \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & a \\ -d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} d & a \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & -a \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & a \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & -a \\ -d & 0 \end{pmatrix} \Bigg]. \end{aligned}$$

Die Matrizen jeder der vier Differenzen haben jeweils gleiche Determinante (n, n, $-n$, $-n$) und gleiche Spur ($d+a$, d, $d-a$, d). Daher ist die Gesamtspur, also die Summe der Spuren der vier Differenzen, identisch 0. Es folgt die Aussage des Satzes, nämlich $\operatorname{Tr}(E_2;\, A) = 0$. ■

§3. Der nichtelementare Spuranteil

In diesem Abschnitt berechnen wir die nichtelementare Spur $\operatorname{Tr}(P;\, A)$. Dazu zerlegen wir P schrittweise weiter in eine Summe einfacherer Teiloperatoren. Ausgangspunkt dafür ist der Teilausdruck

$$\begin{aligned}(S-1)\; B\,\widetilde{T}_n^\omega\; (S-1) &= \left(S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega - B\,\widetilde{T}_n^\omega\right)\,(S-1)\\ &= S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\, S - B\,\widetilde{T}_n^\omega\, S - S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega + B\,\widetilde{T}_n^\omega.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$P = (P_1 - P_3) - P_2 + P_4 \tag{5.12}$$

für

$$P_1 =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\,\left(T - T^{-1}\right)\, B\,\widetilde{T}_n^\omega,$$

$$P_2 =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\,\left(T - T^{-1}\right)\, S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega$$

und

$$P_3 =_{\text{def.}} P_1\, S,$$

$$P_4 =_{\text{def.}} P_2\, S.$$

(5.13) LEMMA. (($P_1 - P_3$)-Operator) *Die Spur des Operators $P_1 - P_3$ auf A_w ist für alle*

$n \geq 1$ *gegeben durch:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(P_1 - P_3;\, A_w) \cdot Y^w =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} (a+d) \left(\left(1-(a+d)\,Y + n\,Y^2\right)^{-1} + \left(1+(a+d)\,Y + n\,Y^2\right)^{-1} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} (a+d) \left(1-(a-d)\,Y - n\,Y^2\right)^{-1}$$

$$- \left(\sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \sum_{0\leq |t| \leq d}^{*} \left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \sum_{0\leq |t| \leq d}^{*} \left(1+t\,Y-n\,Y^2\right) \right)$$

$$+ \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \left(-\frac{4\,w}{w+1}\, \sigma_{w+1}(n) \right) \cdot Y^w.$$

Dabei bedeutet $\sum^{*}$*, daß die* Eckterme $t=-d$ *und* $t=d$ *mit der Vielfachheit* $\frac{1}{2}$ *gezählt werden.*

Beweis. Nach 1.25 gibt es für jeden Bernoulli-Operator $B\colon A_\omega \longrightarrow A$ genau eine Abbildung $\lambda_B\colon A \longrightarrow A_\alpha$, so daß $1+\lambda = (T-1)\;B$ auf ganz A gilt. Daher können wir $P_1 - P_3$ wie folgt umschreiben:

$$P_1 - P_3 = (1+\varepsilon)\;\left(1+T^{-1}\right)\;(1+\lambda_B)\;\widetilde{T}_n^{\omega}\;(1-S) = P_X + P_Y$$

mit

$$P_X =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\;\left(1+T^{-1}\right)\;\widetilde{T}_n^{\omega}\;(1-S)$$

und

$$P_Y =_{\text{def.}} (1+\varepsilon)\;\left(1+T^{-1}\right)\;\lambda_B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\;(1-S)\,.$$

(Nach Definition ist $\widetilde{T}_n^{\omega} = \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\leq b<d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.)

Wir betrachten zunächst den Operator P_Y auf A_w. Da $X^j \Big| \lambda_B = -\frac{1}{j+1}$ für $0 \leq j \leq$

w gilt, müssen wir die Aktion von $\widetilde{T}_n^w$ nur auf den Konstanten (komplexen Zahlen) $c = c\,X^0 \in A_w$ betrachten. Für jede Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $ad = n$, $0 \leq b < d$ ist $c\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = c\,\left(\frac{aX+b}{d}\right)^0 d^w = c\,d^w$, also

$$c\Big|\widetilde{T}_n^w = c\Big|\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = c\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b<d}} d^w = c\sum_{\substack{d>0,\\ad=n}} d\,d^w = c\sum_{\substack{d>0,\\d|n}} d^{w+1} = c\,\sigma_{w+1}(n).$$

Wegen $1\Big|(1-S) = -(X^w-1)$ bildet P_Y in den eindimensionalen Raum $\mathbb{C}\cdot(X^w-1)$ ab. Die Spur von P_Y stimmt daher mit dem Eigenwert von P_Y auf $\mathbb{C}\cdot(X^w-1)$ überein. Wie in 2.4 und 5.2 können wir diesen Eigenwert leicht bestimmen: $(X^w-1)\Big|P_Y = \frac{4\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)\Big|(1-S) = -\frac{4\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)\cdot(X^w-1)$, d. h.

$$\sum_{\substack{w=0,\\w\text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(P_Y;\,A_w)\cdot Y^w = \sum_{\substack{w=0,\\w\text{ gerade}}}^{\infty} \left(-\frac{4\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)\right)\cdot Y^w. \tag{5.14}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die Spur des Operators P_X auf A_w. Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}
P_X &= \sum_{\substack{a\,d=n,\\a,d>0}}\ \sum_{0\leq b<d} (1+\varepsilon)\,(1+T^{-1}) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} (1-S)\\
&= \sum_{\substack{a\,d=n,\\a,d>0}}\ \sum_{0\leq b<d} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \varepsilon\,T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)(1-S)\\
&= \sum_{\substack{a\,d=n,\\a,d>0}}\ \sum_{0\leq b<d} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & d-b \\ 0 & d \end{pmatrix}\\
&\qquad - \left[\begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-d & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & a \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d-b & a \\ d & 0 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Wir fassen nun die Matrizen 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 sowie 7 und 8 zu $P_{X,1}$, $P_{X,2}$, $P_{X,3}$

und $P_{X,4}$ resp. zusammen, d. h.

$$P_X = P_{X,1} + P_{X,2} - \Big(P_{X,3} + P_{X,4}\Big).$$

Die zusammengefaßten Matrizen haben jeweils die gleiche Determinante, nämlich $-n$ im ε-Fall, sonst n. Es folgt durch Vertauschen von a und d im ersten Summanden (was aus Symmetriegründen die Summe nicht ändert):

$$\begin{aligned} P_{X,1} &= \sum_{\substack{a\,d=n,\\ a,d>0}} \sum_{0\le b<d} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] \\ &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<a} \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(P_{X,1};\, A_w)\cdot Y^w = \\ &\quad = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} a \left\{ \big(1-(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} \right\} + \\ &\qquad\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} d \left\{ \big(1-(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} \right\} \\ &\quad = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} (a+d)\, \Big(\big(1-(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a+d)\,Y + n\,Y^2\big)^{-1} \Big). \end{aligned}$$

Der nächste Operator ist

$$\begin{aligned} P_{X,2} &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \begin{pmatrix} -a & d-b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<a} \begin{pmatrix} -d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(P_{X,2};\, A_w)\cdot Y^w =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} a\left\{\bigl(1-(a-d)\,Y - n\,Y^2\bigr)^{-1} + \bigl(1+(a-d)\,Y - n\,Y^2\bigr)^{-1}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} d\left\{\bigl(1-(a-d)\,Y - n\,Y^2\bigr)^{-1} + \bigl(1+(a-d)\,Y - n\,Y^2\bigr)^{-1}\right\}$$

$$= \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} (a+d)\,(1-(a-d)\,Y - n\,Y^2)^{-1}$$

folgt. Dabei haben wir jeweils im zweiten Summanden beider Summen a und d vertauscht, was $1+(a-d)\,Y-n\,Y^2$ zu $1-(a-d)\,Y-n\,Y^2$ transformiert.

Der vorletzte Operator ist

$$P_{X,3} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-d & -a \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser hat die Spur

$$\mathfrak{S} =_{\text{def.}} \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(P_{X,3};\, A_w)\cdot Y^w,$$

gegeben durch:

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<d} \left[\frac{1}{2}\left(\bigl(1-b\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1} + \bigl(1+b\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\bigl(1-(b-d)\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1} + \bigl(1+(b-d)\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1}\right)\right].$$

Wir fassen nun die beiden Summanden beider Zeilen zusammen. Es folgt:

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left[\frac{1}{2}\sum_{0\le|t|<d}^{**} \bigl(1-t\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{0<|t|\le d} \bigl(1-t\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1}\right]$$

$$= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left[\sum_{0\le|t|<d} \left(1 - tY + nY^2\right)^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{t\in\{-d,d\}} \left(1 - tY + nY^2\right)^{-1} \right]$$
$$= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le|t|\le d}{}^{*} \left(1 - tY + nY^2\right)^{-1}.$$

Dabei bedeutet $\sum^{**}$, daß der Summand an der Stelle $t = 0$ doppelt gezählt wird. $\sum^{*}$ gibt an, daß die *Eckterme* $t = -d$ und $t = d$ mit der Vielfachheit $\frac{1}{2}$ gezählt werden. Die Spur des Operators $P_{X,4}$ erhält man auf exakt die gleiche Weise, wobei wir lediglich die Determinante n durch $-n$ ersetzen müssen. Außerdem tauschen wir $-t$ durch t, was die Summe nicht ändert:

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(P_{X,4};\, A_w\right) \cdot Y^w = \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le|t|\le d}{}^{*} \left(1 + tY - nY^2\right)^{-1}.$$

■

(5.15) LEMMA. *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} (a+d)\left(1 - (a-d)\,Y - n\,Y^2\right)^{-1} = 2 \cdot \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \sigma_{w+1}(n)\, Y^w.$$

Beweis. Es ist $\frac{a+d}{1-(a-d)\,Y-n\,Y^2} = \frac{a+d}{(1-a\,Y)\cdot(1+a\,Y)} = (a+d)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(a\,Y)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty}(-d\,Y)^l = (a+d)\cdot \sum_{k,l=0}^{\infty} a^k\,(-d)^l\,Y^{k+l} = (a+d)\cdot \sum_{w=0}^{\infty} Y^w \cdot \left(\sum_{r=0}^{w} a^r\,(-d)^{w-r}\right) = (a+d)\cdot \sum_{w=0}^{\infty} Y^w\,(-d)^w \cdot \sum_{r=0}^{w}\left(-\frac{a}{d}\right)^r = (a+d)\cdot \sum_{w=0}^{\infty} Y^w\,(-d)^w \cdot \frac{1-\left(-\frac{a}{d}\right)^{w+1}}{1+\frac{a}{d}}$, wobei wir im letzten Schritt $\sum_{r=0}^{w} q^r = \frac{1-q^{w+1}}{1-q}$ für $q = -\frac{a}{d}$ benutzt haben. Der linke Term in der Aussage ist gegeben durch:

$$P(Y) =_{\text{def.}} \sum_{\substack{a,d>0,\\ a\cdot d=n}} (a+d)\cdot\left(1 - a\,Y\right)^{-1}\left(1 + d\,Y\right)^{-1}.$$

Aus Symmetriegründen gilt $P(Y) = P(-Y)$, so daß in $P(Y)$ nur gerade Y-Potenzen vorkommen. Aus den Vorbetrachtungen folgt daher:

$$
\begin{aligned}
P(Y) &= \sum_{\substack{a,d>0,\\ a\cdot d=n}} (a+d) \left[\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} Y^w\, d^w \cdot \frac{1+\left(\frac{a}{d}\right)^{w+1}}{1+\frac{a}{d}} \right] \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a,d>0,\\ w \text{ gerade}}} (a+d)\, d^w \cdot \frac{1+\left(\frac{a}{d}\right)^{w+1}}{1+\frac{a}{d}} \right) \cdot Y^w \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a,d>0,\\ w \text{ gerade}}} a^{w+1} + d^{w+1} \right) \cdot Y^w \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \sigma_{w+1}(n) \cdot Y^w.
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Umformungsschritt haben wir

$$
\frac{1+\left(\frac{a}{d}\right)^{w+1}}{1+\frac{a}{d}} = \frac{\left(d^{w+1}+a^{w+1}\right)}{d^{w+1}} \cdot \frac{d}{a+d} = \frac{a^{w+1}+d^{w+1}}{d^w\,(a+d)}
$$

benutzt. ■

Mit Hilfe des Lemmas können wir noch eine zweite Version für die Spurformel von $P_1 - P_3$ angeben.

(5.16) Korollar. (($P_1 - P_3$)-Operator) *Die Spur des Operators $P_1 - P_3$ auf A_w ist für* *alle $n \geq 1$ gegeben durch:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}(P_1 - P_3;\, A_w) \cdot Y^w =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} (a+d) \left(\left(1-(a+d)\,Y + n\,Y^2\right)^{-1} + \left(1+(a+d)\,Y + n\,Y^2\right)^{-1} \right)$$

$$- \left(\sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \sum_{0\leq |t| \leq d}^{*} \left(1 - t\,Y + n\,Y^2\right)^{-1} + \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \sum_{0\leq |t| \leq d}^{*} \left(1 + t\,Y - n\,Y^2\right) \right)$$

$$- \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{w-1}{w+1}\, \sigma_{w+1}(n) \right) \cdot Y^w .$$

Dabei bedeutet $\sum^*$*, daß die* Eckterme $t=-d$ *und* $t=d$ *mit der Vielfachheit* $\frac{1}{2}$ *gezählt werden.*

Beweis. Für alle $n \geq 1$ und $w \geq 0$ gilt: $2 \cdot \sigma_{w+1}(n) - \frac{4\,w}{w+1} \cdot \sigma_{w+1}(n) = 2\,\frac{w-1}{w+1} \cdot \sigma_{w+1}(n)$. ■

(5.17) LEMMA. *Seien $n \geq 1$ und m ungerade mit $0 < m < w$ beliebig vorgegeben, dann gilt:*

$$X^m \Big| B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,(T-1) = X^m \Big| \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\leq b<a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} .$$

Beweis. Wir benutzen die beiden folgenden Indentitäten für Bernoulli-Polynome (siehe z. B. [18, S. 219]):

(i) $d^{-m}\, B_{m+1}(Y) = \sum\limits_{0\leq b<d} B_{m+1}\left(\frac{Y+b}{d}\right), \quad d > 0,$

(ii) $B_{m+1}\,(Y+1) - B_{m+1}(Y) = (m+1)\,Y^m$

und erhalten:

$$X^m \Big| B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,(T-1) = \frac{1}{m+1}\, B_{m+1}(X) \Big| \widetilde{T}_n^{\omega}\,(T-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m+1} \sum_{ad=n} \sum_{0\le b<d} B_{m+1}\left(\frac{a\,X+b}{d}\right) d^w \Big| (T-1) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \left(d^{w-m}\, B_{m+1}(a\,X)\right)\Big|(T-1) \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} d^{w-m} \left(B_{m+1}\big(a\,(X+1)\big) - B_{m+1}(a\,X)\right) \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} d^{w-m} \left(\sum_{0\le b<a} B_{m+1}(a\,X+b+1) - B_{m+1}(a\,X+b)\right) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} d^{w-m} \sum_{0\le b<a} \left((m+1)\,(a\,X+b)^m\right) \\
&= \sum_{\substack{ad=n,\\ a,d>0}} \left(d^{w-m} \sum_{0\le b<a} (a\,X+b)^m\right) \\
&= \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le b<a}} X^m \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&= X^m \Big| \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le b<a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

(5.18) Korollar. *Seien $n \geq 1$ und m ungerade mit $0 < m < w$ beliebig vorgegeben, dann gilt:*

(i) $X^m \Big| B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(1-T^{-1}) = X^m \Big| \sum_{\substack{ad=n,\\ -a\le b<0}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$

(ii) $X^m \Big| B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(T-T^{-1}) = X^m \Big| \sum_{\substack{ad=n,\\ -a\le b<a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$

Beweis. Die Aussage (i) folgt sofort wegen $B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(1-T^{-1}) = B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(T-1)\,T^{-1}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & d \end{pmatrix}$ aus 5.17, denn $X^m \Big| B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(1-T^{-1}) =$

$X^m\Big|\sum_{\substack{ad=n,\\0\le b<a}}\begin{pmatrix}a & b-a\\0 & d\end{pmatrix} = X^m\Big|\sum_{\substack{ad=n,\\-a\le b<0}}\begin{pmatrix}a & b\\0 & d\end{pmatrix}$. Die Aussage (ii) folgt leicht aus 5.17 und (i), da $B\widetilde{T}_n^\omega\left(T-T^{-1}\right) = B\widetilde{T}_n^\omega\left((T-1)+(1-T^{-1})\right) = B\widetilde{T}_n^\omega\,(T-1) + B\widetilde{T}_n^\omega\left(1-T^{-1}\right)$. ■

(5.19) LEMMA. (P_2-Operator) *Für alle $n\ge 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w\ \mathit{gerade}}}\mathrm{Tr}\,(P_2;\,A_w)\cdot Y^w = \sum_{ad=n}\ \sum_{0\le|t|\le d}{}^{*}\left(\left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}-\left(1+t\,Y-n\,Y^2\right)^{-1}\right).$$

Dabei bedeutet $\sum^*$, daß die Eckterme $t=-d$ und $t=d$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert werden.

Beweis. Wir wollen die Spur von $P_2=(1+\varepsilon)\,\left(T-T^{-1}\right)\,S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega$ auf A_w berechnen. Mit Hilfe der Rechenregeln $a\big|\varepsilon\,S=a\big|S\,\varepsilon$, $a\big|\varepsilon\,T=a\big|T^{-1}\,\varepsilon$ und $a\big|\varepsilon\,T^{-1}=a\big|T\,\varepsilon$ für $(a\in A_w)$ folgt:

$$\begin{aligned}
P_2 &= (1+\varepsilon)\,\left(T-T^{-1}\right)\,S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\\
&= \left(T^{-1}-T\right)\,S+\varepsilon\,\left(T^{-1}-T\right)\,S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\\
&= \left(T^{-1}-T\right)\,S-\varepsilon\,\left(T-T^{-1}\right)\,S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\\
&= \left(T^{-1}-T\right)\,S-\left(T^{-1}-T\right)\,\varepsilon\,S\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\\
&= \left(T^{-1}-T\right)\,S-\left(T^{-1}-T\right)\,S\,\varepsilon\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\\
&= \left(T-T^{-1}\right)\,S\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega.
\end{aligned}\tag{5.20}$$

Da jede Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen von Teiloperatoren ist, können wir in P_2 die Terme $\left(T-T^{-1}\right)\,S$ und $(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega$ vertauschen, so daß dann für alle geraden $w\ge 0$ $(n\ge 1)$

$$\mathrm{Tr}\,(P_2;\,A_w)=\mathrm{Tr}\left((1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,\left(T-T^{-1}\right)\,S;\,A_w\right)$$

gilt. Wir bemerken, daß $(1-\varepsilon):A_w\longrightarrow A_w^-\subseteq(A_w)_\omega=$ Polynome vom Grad $\le k-3=$

$w+1$ gilt, wobei A_w^- die Menge aller ungeraden Polynome aus A_w ist. Daher können wir 5.18 (ii) anwenden, es folgt:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_2 &=_{\text{def.}} (1-\varepsilon)\; B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,\left(T-T^{-1}\right)\, S\\ &= (1-\varepsilon)\sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} S\\ &= \sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\begin{pmatrix} b & -a\\ d & 0\end{pmatrix} - \sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\begin{pmatrix} -b & a\\ d & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir setzen noch

$$\widehat{\mathcal{T}}_1 =_{\text{def.}} \operatorname{Tr}\left(\sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\begin{pmatrix} b & -a\\ d & 0\end{pmatrix};\, A_w\right)$$

und

$$\widehat{\mathcal{T}}_2 =_{\text{def.}} \operatorname{Tr}\left(\sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\begin{pmatrix} -b & a\\ d & 0\end{pmatrix};\, A_w\right).$$

Die Matrizen in $\widehat{\mathcal{T}}_1$ haben Determinante n, die Matrizen in $\widehat{\mathcal{T}}_2$ haben Determinante $-n$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{T}}_1 &= \sum_{ad=n}\sum_{-a\le b<a}\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-bY+nY^2\right)^{-1}+\left(1+bY+nY^2\right)^{-1}\right]\\ &= \sum_{ad=n}\sum_{0\le|t|\le a}\left(1-tY+nY^2\right)^{-1}-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-aY+nY^2\right)^{-1}+\left(1+aY+nY^2\right)^{-1}\right]\\ &= \sum_{ad=n}\sideset{}{^*}\sum_{0\le|t|\le a}\left(1-tY+nY^2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Die Summe ist invariant unter einem Vorzeichenwechsel von b und der Ersetzung von t durch $-t$, d. h.

$$\widehat{\mathcal{T}}_2 = \sum_{ad=n}\sideset{}{^*}\sum_{0\le|t|\le a}\left(1+tY-nY^2\right)^{-1}.$$

Wegen $\operatorname{Tr}(P_2;\,A_w) = \operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_2;\,A_w\right) = \widehat{\mathcal{T}}_1-\widehat{\mathcal{T}}_2$ folgt die Behauptung, wobei wir noch a und d vertauscht haben. ■

Es bleibt, die komplizierteste Spur zu berechnen, nämlich die des Operators

$$P_4 = (1+\varepsilon)\,\left(T - T^{-1}\right)\,S\,\widetilde{T}_n^\omega\,S.$$

(5.21) LEMMA. *Für alle $n \geq 1$ und geraden $w \geq 0$ gilt:*

$$\mathrm{Tr}\,(P_4;\,A_w) = \mathrm{Tr}\,(P_5;\,A_w) + \mathrm{Tr}\,(P_6;\,A_w) + \mathrm{Tr}\,(P_7;\,A_w)\,,$$

wobei

$$P_5 =_{def.} (\varepsilon - 1)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(T-1)\,S\,T\,S,$$

$$P_6 =_{def.} (\varepsilon - 1)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,(T-1)\,S\,T,$$

$$P_7 =_{def.} -(1+\varepsilon)\,S\,\left(1+T^{-1}\right)\,(1+\lambda_B)\,\widetilde{T}_n^\omega.$$

Beweis. In 5.20 haben wir bereits $(1+\varepsilon)\,\left(T-T^{-1}\right)\,S = \left(T-T^{-1}\right)\,S\,(1-\varepsilon)$ gezeigt. Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(P_4;\,A_w) &= \mathrm{Tr}\left(\left(T-T^{-1}\right)\,S\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S;\,A_w\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left((1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S\,\left(T-T^{-1}\right)\,S;\,A_w\right),\end{aligned}$$

denn die Spur bleibt unverändert bei Vertauschen von $\left(T-T^{-1}\right)\,S$ und $(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S$. Zur Abkürzung setzen wir noch:

$$\widehat{P}_4 =_{\text{def.}} (1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}_n^\omega\,S\,\left(T-T^{-1}\right)\,S.$$

Wir formen nun den Term $S\,\left(T-T^{-1}\right)\,S$ um. Es ist leicht nachzurechnen, daß $S\,T\,S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}\,S\,T^{-1}$, $T\,S\,T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $S\,T^{-1}\,S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt. Da $-I$

trivial auf A_w operiert, sind auch $T\,S\,T$ und $S\,T^{-1}\,S$ als Operatoren identisch, d. h.:

$$\begin{aligned} S\,\left(T-T^{-1}\right)\,S &= T^{-1}\,S\,T^{-1} - T\,S\,T \\ &= T^{-1}\,S\,T^{-1} - S\,T^{-1} - T\,S\,T + S\,T - S\,T + S\,T^{-1} \\ &= (1-T)\,T^{-1}\,S\,T^{-1} - (T-1)\,S\,T - S\,\left(T-T^{-1}\right). \end{aligned}$$

Einsetzen des Terms ergibt

$$\begin{aligned} \widehat{P}_4 &= (1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n\left((1-T)\,T^{-1}\,S\,T^{-1} - (T-1)\,S\,T - S\,\left(T-T^{-1}\right)\right) \\ &= P_5 + P_6 + \widehat{P}_7 \end{aligned}$$

für

$$P_5 = -\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n\,(T-1)\,S\,T\,S,$$

$$P_6 = -\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n\,(T-1)\,S\,T,$$

$$\widehat{P}_7 = -\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n\,S\,\left(T-T^{-1}\right).$$

Wegen $S\,\left(T-T^{-1}\right)\,(1-\varepsilon) = (1+\varepsilon)\,S\,\left(T-T^{-1}\right)$ und durch Vertauschen der beiden Terme $-\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n\,S$ und $S\,\left(T-T^{-1}\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_7;\,A_w\right) &= \operatorname{Tr}\left(-S\,\left(T-T^{-1}\right)\,(1-\varepsilon)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n;\,A_w\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(-\,(1+\varepsilon)\,S\,\left(T-T^{-1}\right)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n;\,A_w\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(P_7;\,A_w\right), \end{aligned}$$

wobei

$$P_7 =_{\text{def.}} -\,(1+\varepsilon)\,S\,\left(T-T^{-1}\right)\,B\,\widetilde{T}^{\omega}_n.$$

Abschließend wenden wir noch die Identität 1.25 (d. h. $(T-1)\,B = 1+\lambda_B$ auf A_w) auf

P_7 an und erhalten die Aussage des Satzes, denn:

$$\begin{aligned}P_7 &= -(1+\varepsilon)\, S\, \left(T-1+1-T^{-1}\right)\, B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\\ &= -(1+\varepsilon)\, S\Big((T-1)\, B + T^{-1}\,(T-1)\, B\Big)\,\widetilde{T}_n^{\omega}\\ &= -(1+\varepsilon)\, S\Big((1+\lambda_B) + T^{-1}\,(1+\lambda_B)\Big)\,\widetilde{T}_n^{\omega}\\ &= -(1+\varepsilon)\, S\,\left(1+T^{-1}\right)\,(1+\lambda_B)\,\widetilde{T}_n^{\omega}.\end{aligned}$$

■

(5.22) Lemma. (P_5-Operator) *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \mathrm{Tr}\,(P_5;\, A_w)\cdot Y^w =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}}\ \sum_{d<|t|\leq a+d}\left(1+tY+nY^2\right)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}}\left[\sum_{d-a\leq t<d}\left(1+tY-nY^2\right)^{-1} + \sum_{-d<t\leq a-d}\left(1+tY-nY^2\right)^{-1}\right].$$

Beweis. Nach 5.17 und wegen $S\,T\,S = T^{-1}\,S\,T^{-1}$ ist

$$P_5 = (\varepsilon - 1)\sum_{ad=n}\ \sum_{0\leq b<a}\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} T^{-1}\,S\,T^{-1} = \varepsilon\,\mathfrak{S} - \mathfrak{S},$$

wobei

$$\mathfrak{S} =_{\text{def.}} \sum_{ad=n}\ \sum_{0\leq b<a}\begin{pmatrix} b-a & -b\\ d & -d\end{pmatrix},\quad \varepsilon\,\mathfrak{S} = \sum_{ad=n}\ \sum_{0\leq b<a}\begin{pmatrix} a-b & b\\ d & -d\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(\mathfrak{S};\, A_w) \cdot Y^w =$$

$$= \sum_{ad=n} \sum_{0 \le b < a} \frac{1}{2} \left[\big(1-(b-a-d)\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} + \big(1+(b-a-d)\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ad=n} \sum_{0 \le b < a} \left[\big(1+((a+d)-b)\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} + \big(1+(b-(a+d))\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ad=n} \sum_{d < |t| \le a+d} \big(1+t\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} .$$

Die letzte Gleichung erhält man durch Zusammenfassen der beiden Ausdrücke

$$\sum_{0 \le b < a} \big(1+((a+d)-b)\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} = \sum_{d < t \le a+d} \big(1+t\, Y + n\, Y^2\big)^{-1}$$

und

$$\sum_{0 \le b < a} \big(1+((a+d)-b)\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} = \sum_{-(a+d) \le t < d} \big(1+t\, Y + n\, Y^2\big)^{-1} .$$

Für den ε-Anteil gilt:

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(\varepsilon\, \mathfrak{S};\, A_w) \cdot Y^w =$$

$$= \sum_{ad=n} \sum_{0 \le b < a} \frac{1}{2} \left[\big(1-(a-d-b)\, Y - n\, Y^2\big)^{-1} + \big(1+(a-d-b)\, Y - n\, Y^2\big)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ad=n} (\mathfrak{T}_{1,\varepsilon} + \mathfrak{T}_{2,\varepsilon}) ,$$

wobei

$$\mathfrak{T}_{1,\varepsilon} =_{\text{def.}} \sum_{0 \le b < a} \big(1+(b+d-a)\, Y - n\, Y^2\big)^{-1} = \sum_{\substack{a>0,\\ d-a \le t < d}} \big(1+t\, Y - n\, Y^2\big)^{-1}$$

und

$$\mathfrak{T}_{2,\varepsilon} =_{\text{def.}} \sum_{0\le b<a} \bigl(1+(a-d-b)\,Y - n\,Y^2\bigr)^{-1} = \sum_{\substack{a>0,\\ -d<t\le a-d}} \bigl(1+t\,Y-n\,Y^2\bigr)^{-1}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

(5.23) LEMMA. (P_6-Operator) *Für alle $n \ge 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(P_6;\, A_w)\cdot Y^w =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{d\le |t|<a+d} \bigl(1-t\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left[\sum_{d-a<t\le d} \bigl(1+t\,Y-n\,Y^2\bigr)^{-1} + \sum_{-d\le t<a-d} \bigl(1+t\,Y-n\,Y^2\bigr)^{-1}\right].$$

Beweis. Nach 5.17 gilt

$$P_6 = (\varepsilon-1)\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<a} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} S\,T = \varepsilon\,\mathfrak{S} - \mathfrak{S},$$

für

$$\mathfrak{S} =_{\text{def.}} \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<a} \begin{pmatrix} b & b-a \\ d & d\end{pmatrix}, \quad \varepsilon\,\mathfrak{S} = \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{0\le b<a} \begin{pmatrix} -b & a-b \\ d & d\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(\mathfrak{S};\, A_w)\cdot Y^w =$$

$$= \sum_{ad=n} \sum_{0\le b<a} \frac{1}{2}\left[\bigl(1-(b+d)\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1} + \bigl(1+(b+d)\,Y+n\,Y^2\bigr)^{-1}\right]$$

$$= \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < a} \frac{1}{2} \left[\left(1 - (b+d)\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} + \left(1 - (-(b+d))\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{ad=n} \sum_{d \leq |t| < a+d} \left(1 - t\, Y + n\, Y^2\right)^{-1}$$

und

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(\varepsilon\, \mathfrak{S};\, A_w) \cdot Y^w =$$
$$= \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < a} \frac{1}{2} \left[\left(1 - (d-b)\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} + \left(1 + (d-b)\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} \right]$$
$$= \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < a} \frac{1}{2} \left[\left(1 + (b-d)\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} + \left(1 + (d-b)\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{ad=n} \left(\mathfrak{T}_{1,\varepsilon} + \mathfrak{T}_{2,\varepsilon}\right),$$

wobei

$$\mathfrak{T}_{1,\varepsilon} =_{\text{def.}} \sum_{0 \leq b < a} \left(1 + (b-d)\, Y - n\, Y^2\right)^{-1} = \sum_{\substack{a>0,\\ -d \leq t < a-d}} \left(1 + t\, Y - n\, Y^2\right)^{-1}$$

und

$$\mathfrak{T}_{2,\varepsilon} =_{\text{def.}} \sum_{0 \leq b < a} \left(1 + (d-b)\, Y - n\, Y^2\right)^{-1} = \sum_{\substack{a>0,\\ d-a < t \leq d}} \left(1 + t\, Y - n\, Y^2\right)^{-1}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

(5.24) LEMMA. (P_7-Operator) *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \operatorname{Tr}(P_7;\, A_w) \cdot Y^w =$$
$$= -\sum_{ad=n} \sum_{0 \leq |t| \leq d}^{*} \left(1 - t\, Y + n\, Y^2\right)^{-1} - \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq |t| \leq d}^{*} \left(1 + t\, Y - n\, Y^2\right)^{-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \frac{4}{w+1} \cdot \sigma_{w+1}(n) \cdot Y^w.$$

Dabei bedeutet $\sum^*$*, daß die* Eckterme $t = -d$ *und* $t = d$ *mit der Vielfachheit* $\frac{1}{2}$ *gezählt werden.*

Beweis. Wir splitten P_7 wie folgt weiter auf:

$$P_7 = -(1+\varepsilon)\, S\, \left(1 + T^{-1}\right)\, (1+\lambda_B)\, \widetilde{T}_n^{\omega} = P_8 + P_9$$

für

$$P_8 = -(1+\varepsilon)\, S\, \left(1 + T^{-1}\right)\, \widetilde{T}_n^{\omega}$$

und

$$\begin{aligned} -P_9 &= (1+\varepsilon)\, S\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B \, \widetilde{T}_n^{\omega} \\ &= S\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega} + \varepsilon\, S\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega} \\ &= S\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega} + S\, \varepsilon\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega} \\ &= S\, \left(\left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega} + \varepsilon\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega}\right) \\ &= S\, (1+\varepsilon)\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega}. \end{aligned}$$

Durch zyklisches Vertauschen können wir S nach rechts verschieben, ohne die Spur zu verändern, d. h.:

$$\operatorname{Tr}(P_9;\, A_w) = \operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_9;\, A_w\right)$$

für

$$\widehat{P}_9 =_{\text{def.}} -(1+\varepsilon)\, \left(1+T^{-1}\right)\, \lambda_B\, \widetilde{T}_n^{\omega}\, S.$$

Analog zur Argumentation in 5.13 sieht man, daß das Bild von $\widehat{P}_9$ in dem eindimensionalen Raum $\mathbb{C}\cdot X^w$ liegt. Daher stimmt $\operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_9;\, A_w\right)$ mit dem Eigenwert von X^w überein, welcher wegen $X^w \Big| (1+\varepsilon)\,\left(1+T^{-1}\right)\,\lambda_B\,\widetilde{T}_n^\omega = -\frac{4}{w+1}\cdot\sigma_{w+1}(n)$, was $X^w \Big| \widehat{P}_9 = \frac{4}{w+1}\cdot\sigma_{w+1}(n)\cdot X^w$ ergibt, durch $\frac{4}{w+1}\cdot\sigma_{w+1}(n)$ gegeben ist.

Wir betrachten nun den Operator

$$P_8 = -\left(S\,\widetilde{T}_n^\omega + S\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\right) - \varepsilon\,\left(S\,\widetilde{T}_n^\omega + S\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega\right) = -\mathfrak{S} - \varepsilon\,\mathfrak{S},$$

wobei

$$\mathfrak{S} = S\,\widetilde{T}_n^\omega + S\,T^{-1}\,\widetilde{T}_n^\omega = \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le b<d}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -d \\ a & b-d \end{pmatrix}\right]$$

und

$$\varepsilon\,\mathfrak{S} = \sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le b<d}} \left[\begin{pmatrix} 0 & d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & d \\ a & b-d \end{pmatrix}\right].$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \mathrm{Tr}\,(-\mathfrak{S};\,A_w)\cdot Y^w &= -\sum_{\substack{ad=n,\\ 0\le b<d}} \frac{1}{2}\cdot\Big[\left(1-b\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \left(1-(-b)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \\ &\qquad + \left(1-(b-d)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \left(1-(d-b)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}\Big] \\ &= -\sum_{ad=n}\ \sum_{0\le|t|\le d}^{*} \left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Summanden über Kreuz zusammengefaßt. Es ist zu beachten, daß die Eckterme $\pm\,d$ in der oberen Summe mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ auftreten.

Die Spur von $\varepsilon\,\mathfrak{S}$ wird im Wesentlichen genauso gebildet, wobei nur noch die Determinante n durch $-n$ getauscht werden muß. Da die Summe symmetrisch in t ist, tauschen wir t durch $-t$, ohne die Summe zu ändern, d. h.:

$$\sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}} \mathrm{Tr}\,(-\varepsilon\,\mathfrak{S};\,A_w)\cdot Y^w = -\sum_{ad=n}\ \sum_{0\le|t|\le d}^{*} \left(1+t\,Y-n\,Y^2\right)^{-1}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ∎

§4. Vergleich mit der Spurformel von Zagier

Wir wollen nun mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse die folgende Spurformel aus [32] rekonstruieren.

(5.25) THEOREM. *Für beliebiges $n \geq 1$ sind die Spuren des n-ten Heckeoperators T_n auf den Modulräumen $\mathscr{M}_w = \mathscr{M}_w(\Gamma(1))$ für alle (geraden) $w = k-2 \geq 0$ durch die folgende erzeugende Funktion gegeben:*

$$-12 \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \left(\operatorname{Tr}(T_n;\, \mathscr{M}_{w+2}) - \frac{1}{2}\,\sigma_{w+1}(n)\right) Y^w$$
$$= \sum_{\substack{ad>0>bc,\\ ad-bc=n}} \operatorname{sgn}(c\,d)\left(1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} +$$
$$+ \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left(\sideset{}{^*}\sum_{0\leq|t|\leq a} 2\,\left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \sideset{}{^*}\sum_{0\leq|t|\leq a+d} \left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{|t|=a+d} (-\frac{1}{2})\,|t|\,\left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} \right).$$

Dabei bedeutet $\sum^*$, daß die Eckterme $t = \pm\, a$ *und* $t = \pm\,(a+d)$ *mit der Vielfachheit* $\frac{1}{2}$ *gezählt werden.*

Beweis. Für eine beliebig fixierte natürliche Zahl $n \geq 1$ wollen wir die rechte Seite des Ausdrucks

$$12 \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \operatorname{Tr}\left(\widetilde{T}_n;\, W^+(A_w)\right) Y^w = \sum_{\substack{w=0,\\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \left(\operatorname{Tr}\left(p_B^+\,\widetilde{T}_n;\, A_w\right) + \frac{8\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)\right) Y^w$$

berechnen. Dabei ist $\frac{8\,w}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)$ der Spuranteil des Fehlerterms aus 5.2 und $p_B^+\,\widetilde{T}_n = E_1 + E_2 + P$ mit $P = (P_1 - P_3) - P_2 + P_4$ und $P_4 = P_5 + P_6 + P_7$. Wir fassen zunächst alle Terme zusammen, die $\sigma_{w+1}(n)$ enthalten. Neben dem Beitrag des Fehlerterms liefert $P_1 - P_3$ den Beitrag $-2\left(\frac{w-1}{w+1}\right)\sigma_{w+1}(n)$ und P_7 den Beitrag $\frac{4}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n)$. Die gesuchte Summe ist dann $\frac{8\,w-2\,w+2+4}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n) = \frac{6\,w+6}{w+1}\,\sigma_{w+1}(n) = 6\,\sigma_{w+1}(n)$. Wir betrachten nun alle Ausdrücke, die nicht $\sigma_{w+1}(n)$ enthalten. Der elementare Anteil, gegeben durch den Operator $E_1 + E_2$, liefert den Beitrag $-\sum_{\substack{ad>0>bc,\\ ad-bc=n}} \frac{\operatorname{sgn}(cd)}{1-(a+d-c)\,Y+n\,Y^2}$ zur Spur. Die nichtelementaren Spuranteile stammen von den Operatoren $(P_1-P_3)-P_2$ und P_4. Genauer gesagt, liefert $P_1 - P_3$ die Spurbeiträge

$$\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \frac{1/2\cdot(a+d)}{\left(1-(a+d)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}+\left(1+(a+d)\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}} =$$
$$= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sum_{|t|=a+d} \frac{1/2\cdot|t|}{1-t\,Y+n\,Y^2}$$

sowie

$$-\sum_{ad=n}\ {\sum_{0\le|t|\le d}}^{*} \Big((1-t\,Y+n\,Y^2)^{-1}+(1+t\,Y+n\,Y^2)^{-1}\Big).$$

Der Operator $-P_2$ liefert den Spurbeitrag

$$-\sum_{ad=n}\ {\sum_{0\le|t|\le d}}^{*} \Big((1-t\,Y+n\,Y^2)^{-1}-(1+t\,Y+n\,Y^2)^{-1}\Big).$$

Faßt man diese zusammen, so erhält man den Spurbeitrag von $(P_1-P_3)-P_2$, nämlich:

$$\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left({\sum_{0\le|t|\le a}}^{*} -2\,\left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} + \sum_{|t|=a+d} \frac{1/2\cdot|t|}{1-t\,Y+n\,Y^2}\right).$$

Es bleibt, den Operator $P_4 = P_5 + P_6 + P_7$ zu untersuchen. Wir starten mit der Zusammenfassung aller Terme der Form $\left(1+t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}$ und erhalten:

$$-\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left\{ \frac{1}{2}\sum_{d<|t|\le a+d} + \ \frac{1}{2}\sum_{d\le|t|<a+d} + {\sum_{0\le|t|\le d}}^{*} \right\} \left(1+t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}$$
$$= -\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left\{ \frac{1}{2}\sum_{|t|=a+d} + \ \frac{1}{2}\sum_{d<|t|<a+d} + \ \frac{1}{2}\sum_{d<|t|<a+d} + \ \frac{1}{2}\sum_{|t|=d} + \sum_{0\le|t|<d} + \ \frac{1}{2}\sum_{|t|=d} \right\}$$
$$\cdot\left(1+t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} =$$

$$= -\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sideset{}{^*}\sum_{0\le|t|\le a+d} \left(1+t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1} = -\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \sideset{}{^*}\sum_{0\le|t|\le a+d} \left(1-t\,Y+n\,Y^2\right)^{-1}.$$

Analoges Vorgehen für die ε-Terme $\left(1+t\,Y-n\,Y^2\right)^{-1}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left\{\frac{1}{2}\sum_{d-a\le t<d} + \frac{1}{2}\sum_{-d<t\le a-d} + \frac{1}{2}\sum_{-d\le t<a-d} + \frac{1}{2}\sum_{d-a<t\le d} - \sideset{}{^*}\sum_{0\le|t|\le d}\right\}\\
&\qquad\cdot\left(1+t\,Y-n\,Y^2\right)^{-1}\\
&= \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \left\{\frac{1}{2}\sum_{d-a\le t<d} + \frac{1}{2}\sum_{-d<t\le a-d} + \frac{1}{2}\sum_{-d<t<a-d} + \frac{1}{2}\sum_{d-a<t<d} - \sum_{-d<t<d}\right\}\\
&\qquad\cdot\left(1+t\,Y-n\,Y^2\right)^{-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir für jedes Paar (a,d) mit $a,d>0$ und $a\,d=n$ die folgenden $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$-Multimengen:

$$\mathcal{R}_{(a,d)} =_{\text{def.}} \bigcup_{-d<t<d} \left\{(t,1)\right\}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(a,d)} =_{\text{def.}} &\bigcup_{d-a\le t<d} \left\{\left(t,\frac{1}{2}\right)\right\} \cup \bigcup_{-d<t\le a-d} \left\{\left(t,\frac{1}{2}\right)\right\} \cup\\
&\qquad \cup \bigcup_{-d<t<a-d} \left\{\left(t,\frac{1}{2}\right)\right\} \cup \bigcup_{d-a<t<d} \left\{\left(t,\frac{1}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung fassen wir jeweils alle Paare mit identischer erster Komponente zusammen, in dem wir die zweiten Komponenten addieren, d. h. (t,s_1) und (t,s_2) wird ersetzt durch (t,s_1+s_2). Es ist nun leicht zu sehen, daß $\mathcal{L}_{(a,d)}=\mathcal{R}_{(a,d)}$ im Fall $a=d$ gilt (kommt z. B. für $n=4$ vor, aber für $n=6$ nicht). Sei nun o. B. d. A. $a<d$, dann folgt

$\mathcal{L}_{(a,d)} \cup \mathcal{L}_{(d,a)} = \mathcal{R}_{(a,d)} \cup \mathcal{R}_{(d,a)}$, denn:

$$\mathcal{L}_{(a,d)} = \Big\{ (t,1):\ -d < t < a-d \Big\} \cup \Big\{ \Big(a-d, \frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ \Big(d-a, \frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \Big\{ (t,1): d-a < t < d \Big\}$$

(vgl. Abbildung 5.1),

$$\mathcal{L}_{(d,a)} = \Big\{ (t,1):\ -a < t < a-d \Big\} \cup \Big\{ \Big(a-d, 1+\frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ (t,2): a-d < t < d-a \Big\} \cup \Big\{ \Big(d-a, 1+\frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ (t,1): d-a < t < a \Big\},$$

falls $a > d-a$ (vgl. Abbildung 5.2),

$$\mathcal{L}_{(d,a)} = \Big\{ \Big(a-d, \frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \Big\{ (t,1): a-d < t \leq -a \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ (t,2):\ -a < t < a \Big\} \cup \Big\{ (t,1): a \leq t < d-a \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ \Big(d-a, \frac{1}{2}\Big) \Big\},$$

falls $a < d-a$ (vgl. Abbildung 5.3),

$$\mathcal{L}_{(d,a)} = \Big\{ \Big(-a, \frac{1}{2}\Big) \Big\} \cup \Big\{ (t,2):\ -a < t < a \Big\} \cup \Big\{ \Big(a, \frac{1}{2}\Big) \Big\},$$

falls $d-a = a$ (vgl. Abbildung 5.4, z. B. für $n = 18$, $d = 6$, $a = 3$).

Auf der anderen Seite ist

$$\mathcal{R}_{(d,a)} = \Big\{ (t,1):\ -d < t < d \Big\}, \quad \mathcal{R}_{(a,d)} = \Big\{ (t,1):\ -a < t < a \Big\},$$

also besteht $\mathcal{R}_{(d,a)} \cup \mathcal{R}_{(a,d)}$ aus allen Paaren der Form $(t,1)$, falls $|t| >= a$ und $(t,2)$, falls $|t| < a$.

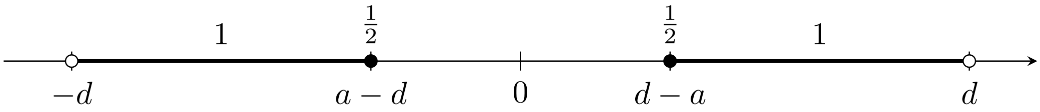

Abbildung 5.1: $\mathcal{L}_{(a,d)}$ für $a < d$, $a - d$ und $d - a$ werden mit Faktor $\frac{1}{2}$ gezählt. Für den Extremfall $a = d$ stimmt das Intervall $\mathcal{L}_{(a,d)}$ mit $\mathcal{R}_{(a,d)}$ überein.

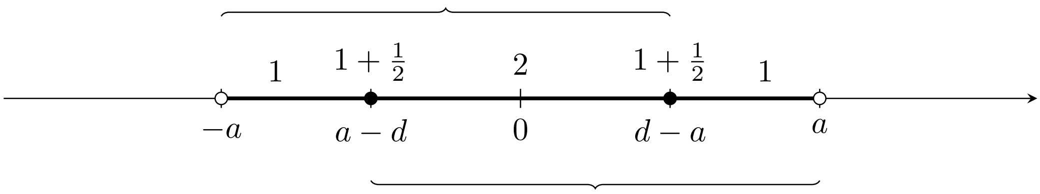

Abbildung 5.2: $\mathcal{L}_{(d,a)}$ für den Fall $a < d$ und $d - a < a$.

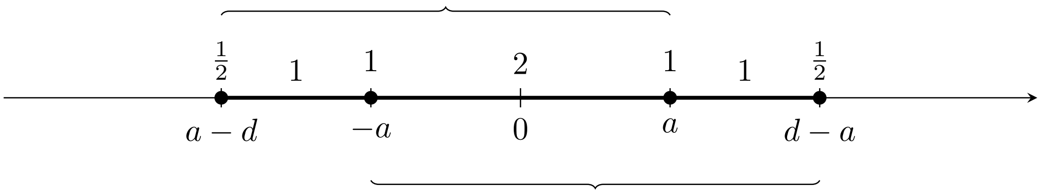

Abbildung 5.3: $\mathcal{L}_{(d,a)}$ für den Fall $a < d$ und $a < d - a$.

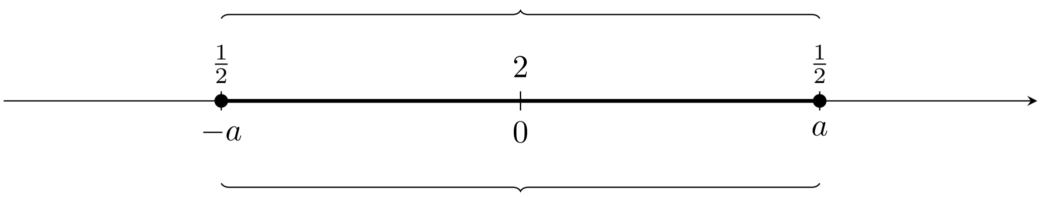

Abbildung 5.4: $\mathcal{L}_{(d,a)}$ für den Fall $a < d$ und $a = d - a$.

Insgesamt erhalten wir $\bigcup_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \mathcal{L}_{(a,d)} = \bigcup_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \mathcal{R}_{(a,d)}$ und damit die Behauptung. ■

Wir können die Ausdrücke $\left(1+e\,Y+f\,Y^2\right)^{-1}$ für $e,f\in\mathbb{Q}$ leicht in formale Potenzreihen $P(Y,e,f)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,Y^j$ entwickeln, indem wir die Koeffizienten $c_j=c_j(e,f)\in\mathbb{Q}$ rekursiv $(j=0,1,2,\ldots,\infty)$ berechnen. Die Rekursionsvorschrift gewinnen wir dabei durch Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned}
1 &= \left(1+e\,Y+f\,Y^2\right)\cdot P(Y,e,f)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} c_j\,Y^j + \sum_{j=1}^{\infty} e\,c_{j-1}\,Y^j + \sum_{j=2}^{\infty} f\,c_{j-2}\,Y^j\\
&= c_0 + (c_1+e\,c_0)\,Y + \sum_{j=2}^{\infty}\left(c_j+e\,c_{j-1}+f\,c_{j-2}\right)Y^j,
\end{aligned}$$

so daß wegen $c_1+e\,c_0=0$ und $c_j+e\,c_{j-1}+f\,c_{j-2}=0$ für alle $j\geq 2$

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1,\\
c_1 &= -e,\\
c_j &= -\left(e\,c_{j-1}+f\,c_{j-2}\right), \quad (j=2,\ldots,\infty)
\end{aligned}$$

folgt. Insbesondere ist $c_j\in\mathbb{Z}$ (für alle $j=1,\ldots,\infty$) im Fall $e,f\in\mathbb{Z}$.

Wir wenden die Rekursionsvorschrift auf das Beispiel [32, S. 323], d. h. den Hecke-Operator T_1 (=Identität) an. Die Koeffizienten der so gewonnenen Potenzreihe entsprechen genau den Dimensionen der Modulräume $\mathcal{M}_k\left(\Gamma_1\right)$ über $\mathbb{C}$ zur vollen Modulgruppe $\Gamma_1=\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{Z}\right)$. Die rechte Seite der Spurformel ist gegeben durch:

$$\frac{-1/2}{1-2Y+Y^2}+\frac{2}{1-Y+Y^2}+\frac{3}{1+0Y+Y^2}+\frac{2}{1+Y+Y^2}+\frac{-1/2}{1+2Y+Y^2}.$$

Die zugehörigen Potenzreihenentwicklungen der (ungewichteten) Terme sind:

$$\left(1-2Y+Y^2\right)^{-1}=1+2Y+3Y^2+4Y^3+5Y^4+6Y^5+7Y^6+8Y^7+9Y^8+\mathcal{O}\left(Y^9\right)$$

$$\left(1-Y+Y^2\right)^{-1}=1+Y-Y^3-Y^4+Y^6+Y^7+\mathcal{O}\left(Y^9\right)$$

$$\left(1+Y^2\right)^{-1}=1-Y^2+Y^4-Y^6+Y^8+\mathcal{O}\left(Y^9\right)$$

$$\left(1+Y+Y^2\right)^{-1}=1-Y+Y^3-Y^4+Y^6-Y^7+\mathcal{O}\left(Y^9\right)$$

$$\left(1+2Y+Y^2\right)^{-1}=1-2Y+3Y^2-4Y^3+5Y^4-6Y^5+7Y^6-8Y^7+9Y^8+\mathcal{O}\left(Y^9\right).$$

Stellt man nach $\sum\limits_{\substack{w=0,\\ w\text{ gerade}}} \operatorname{Tr}\left(T_1;\,\mathcal{M}_{w+2}(\Gamma_1)\right) Y^w$ um, so gilt für entsprechend umgeformte rechte Seite:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(Y) = {} & Y^2+Y^4+Y^6+Y^8+2Y^{10}+Y^{12}+2Y^{14}+2Y^{16}+2Y^{18}+2Y^{20}\\
&+3Y^{22}+2Y^{24}+3Y^{26}+3Y^{28}+3Y^{30}+3Y^{32}+4Y^{34}+3Y^{36}+4Y^{38}\\
&+4Y^{40}+4Y^{42}+4Y^{44}+5Y^{46}+4Y^{48}+5Y^{50}+5Y^{52}+5Y^{54}+5Y^{56}\\
&+6Y^{58}+5Y^{60}+6Y^{62}+6Y^{64}+6Y^{66}+6Y^{68}+7Y^{70}+6Y^{72}+7Y^{74}\\
&+7Y^{76}+7Y^{78}+7Y^{80}+8Y^{82}+7Y^{84}+8Y^{86}+8Y^{88}+8Y^{90}+8Y^{92}\\
&+9Y^{94}+8Y^{96}+9Y^{98}+9Y^{100}+9Y^{102}+9Y^{104}+10Y^{106}+9Y^{108}\\
&+10Y^{110}+10Y^{112}+10Y^{114}+10Y^{116}+11Y^{118}+10Y^{120}+11Y^{122}\\
&+11Y^{124}+11Y^{126}+11Y^{128}+12Y^{130}+11Y^{132}+12Y^{134}+12Y^{136}\\
&+12Y^{138}+12Y^{140}+13Y^{142}+12Y^{144}+13Y^{146}+13Y^{148}+13Y^{150}\\
&+13Y^{152}+14Y^{154}+13Y^{156}+14Y^{158}+14Y^{160}+14Y^{162}+14Y^{164}\\
&+15Y^{166}+14Y^{168}+15Y^{170}+15Y^{172}+15Y^{174}+\mathcal{O}\left(Y^{175}\right).\end{aligned}$$

(Der Fehlerterm geht dabei mit dem Wert $\sum\limits_{\substack{w=0,\\ w\text{ gerade}}} (-6)\,Y^w$ in die rechte Seite ein, denn $\sigma_{w+1}(1)=1$.)

Die Dimensionsformel für die volle Modulgruppe Γ_1 haben wir in 1.43 angegeben. So ist z. B. $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{M}_2\left(\Gamma_1\right)\right)=0$ (dies stimmt mit dem Koeffizienten von Y^0 überein) oder, als weiteres Beispiel, $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{M}_{70}\left(\Gamma_1\right)\right)=\left\lfloor\frac{70}{12}\right\rfloor+1=5+1=6$, denn 12 ist kein Teiler von $68=70-2$. Der Wert ist identisch mit dem berechneten Koeffizienten $\operatorname{coeff}_{68}\left(\mathfrak{P}(Y)\right)=6$.

§5. Eisensteinreihen

Wir wollen abschließend die Spur von 4.24 für den Fall $w = k - 2 = 2$ diskutieren. Wir erhalten auf diese Weise einen alternativen Nachweis der bekannten RAMANUJAN-Identität: $E_4 = E_2^2 - 12\, q\, \frac{d}{dq}\, (E_2)$ (vgl. [27]).

SATZ. *Für $n \geq 1$ gilt:*

$$5\,\sigma_3(n) = \big(6\,n - 1\big)\,\sigma_1(n) + 12\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_1(m)\,\sigma_1(n-m).$$

Beweis. Sei $w = 2$ (also $k = w + 2 = 4$), dann ist $A = A_2 = \mathbb{C}\,X^2 \oplus \mathbb{C}\,X \oplus \mathbb{C}$. Die Aktion von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ist gegeben durch $X^j \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a\,X + b)^j\;(c\,X + d)^{2-j}$, wobei $j = 0, 1, 2$. Weiterhin gilt $W(A) = W^+(A) = \mathbb{C}\,(X^2 - 1)$, denn $\big(X^2 - 1\big)\,\Big|\,(1 + S) = 0 = \big(X^2 - 1\big)\,\Big|\,\big(1 + U + U^2\big)$ und $\dim_{\mathbb{C}}\big(W(A)\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{M}_4\,(\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z}))\,\big) = 1$.

Wir erhalten $\big(X^2 - 1\big)\,\Big|\big(T - T^{-1}\big)\,\big(S - 1\big) = \Big(\,(X + 1)^2 - 1 - (X - 1)^2 + 1\Big)\Big|\big(S - 1\big) = 4\,X\Big|\big(S - 1\big) = -4\,X - 4\,X = -8\,X$ und $-8\,X\Big|B = -8\,\frac{1}{2}\,B_2(X) = -4\,\big(X^2 - X + \frac{1}{6}\big) = -4\,X^2 + 4\,X - \frac{2}{3}$ nach Definition des Bernoulli-Operators in 2.3. Wir wollen nun die Spur des Operators

$$\big(T - T^{-1}\big)\,\big(S - 1\big)\,\Big(B\,\widetilde{T}_n^{\omega}\,\big(S - 1\big) + \overline{T}_n + D_n\,S\Big) : A_{cc} \longrightarrow W(A)$$

berechnen (rechte Seite von 4.24). Da dieser Operator nach $\mathbb{C}\,\big(X^2 - 1\big)$ abbildet, ist die Spur gegeben durch die Summe der Koeffizienten der X^2-Komponenten (=negative Koeffizienten der X^0-Komponenten) der Bilder der einzelnen Teiloperatoren (Summanden) angewendet auf das Polynom $X^2 - 1$. Die entsprechenden Koeffizienten der X-Komponenten der Bilder tragen nicht zur Spur bei. Der Operator $D_n\,S$ trägt demzufolge nicht zur Spur bei, da $-8\,X\Big|D_n\,S = -8\,X\Big|\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} S = -8\,\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}}(a\,d)\,X\Big|S = 8\,n\sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} X = 8\,n\,\sigma_0(n)\,X$ gilt, wobei $\sigma_0(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist.

Im nächsten Schritt betrachten wir die Aktion von $\overline{T}_n = \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
-8\,X\Big|\overline{T}_n = -8\,X\big| \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} &= -8 \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} (a\,X+b)\,(c\,X+d) \\
&= -8 \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} \Big((-ac)\;X^2 + (ad-bc)\,X + (bc)\Big) \\
&= 8 \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} \Big((ac)\;X^2 - (ad-bc)\,X - (bc)\Big).
\end{aligned}$$

Für $m = ad$ ist $a\big|m$ und $c\big|(n-m)$ wegen $n-m=bc$. Der Koeffizient der X^2-Komponente ist demnach gegeben durch:

$$8 \sum_{\substack{a,b,c,d>0,\\ ad+bc=n}} (ac) = 8 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_1(m)\cdot\sigma_1(n-m). \tag{5.26}$$

Der noch fehlende Spurbeitrag ist der Koeffizient der X^2-Komponente des Bildes unter der Aktion des B-Terms:

$$\Big(-4\,X^2 + 4\,X - \tfrac{2}{3}\Big)\Big|\widetilde{T}_n\,\big(S-1\big), \quad \widetilde{T}_n = \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Wir betrachten die Aktion des Operators $\widetilde{T}_n\,\big(S-1\big)$ auf den drei Summanden einzeln, um jeweils den Koeffizienten der X^2-Komponente des zugehörigen Bildes zu ermitteln. Wegen $X^2\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\,\big(S-1\big) = \big(a^2\,X^2 + 2\,a\,b\,X + b^2\big)\Big|\big(S-1\big) = a^2\,X^0 - 2\,a\,b\,X + b^2\,X^2 - \big(a^2\,X^2 + 2\,a\,b\,X + b^2\big) = \big(b^2 - a^2\big)\,X^2 - 4\,a\,b\,X + \big(a^2 - b^2\big)\,X^0$ ist die X^2-Komponente von $-4\,X^2\Big|\widetilde{T}_n\,\big(S-1\big)$ gegeben durch:

$$4 \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} a^2\,X^2 - 4 \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} b^2\,X^2 = 4 \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} \big(a^2\,d\big)\,X^2 - 4 \sum_{d|n} \Bigg(\sum_{0\le b<d} b^2\Bigg)\,X^2 =$$

$$= 4n \sum_{\substack{a,d>0,\\ ad=n}} a\,X^2 - 4 \sum_{d|n} \left(\frac{d\,(d+1)\,(2d+1)}{6} - d^2 \right) X^2$$
$$= 4n\,\sigma_1(n)\,X^2 - 4 \sum_{d|n} \left(\frac{1}{3}\,d^3 - \frac{1}{2}\,d^2 + \frac{1}{6}\,d \right) X^2$$
$$= \left(\left(4n - \frac{2}{3} \right) \sigma_1(n) + 2\,\sigma_2(n) - \frac{4}{3}\,\sigma_3(n) \right) X^2.$$

Wegen $X \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} (S-1) = \big((a\,X+b)\;d\big)\Big|(S-1) = -a\,d\,X + b\,d\,X^2 - a\,d\,X - b\,d\,X^0 =$ $b\,d\,X^2 - 8\,a\,d\,X - b\,d$ ist die X^2-Komponente von $4\,X\Big|\widetilde{T}_n\,(S-1)$ gegeben durch:

$$4 \sum_{0\le b<d} (b\,d)\;X^2 = 4 \sum_{d|n} \left(\sum_{0\le b<d} b \right) d\;X^2 = 4 \sum_{d|n} \left(\frac{d\,(d+1)}{2} - d \right) d\;X^2$$
$$= 4 \sum_{d|n} \left(\frac{d^3 - d^2}{2} \right) X^2 = \big(2\,\sigma_3(n) - 2\,\sigma_2(n) \big)\,X^2.$$

Schließlich ist die X^2-Komponente des letzten Summanden, also von $-\frac{2}{3}\Big|\widetilde{T}_n\,(S-1)$, gegeben durch $-\frac{2}{3}\,\sigma_3(n)\,X^2$, denn $-\frac{2}{3}\,X^0\Big|\widetilde{T}_n\,(S-1) = -\frac{2}{3} \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} d^2\,X^0\Big|(S-1) =$ $-\frac{2}{3} \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} d^2\,X^2 + \frac{2}{3} \sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} d^2\,X^0$ und $\sum_{\substack{0\le b<d,\\ ad=n}} d^2 = \sum_{d|n} d^3 = \sigma_3(n)$.

Insgesamt erhalten wir somit für den X^2-Koeffizienten des B-Terms 5.27 den Wert: $\left(4n - \frac{2}{3}\right)\,\sigma_1(n) + 2\,\sigma_2(n) - \frac{4}{3}\,\sigma_3(n) + 2\,\sigma_3(n) - 2\,\sigma_2(n) - \frac{2}{3}\,\sigma_3(n) = \left(4n - \frac{2}{3}\right)\,\sigma_1(n) +$ $\left(-\frac{4}{3} + \frac{6}{3} - \frac{2}{3}\right)\,\sigma_3(n) = \left(4n - \frac{2}{3}\right)\,\sigma_1(n)$.

Die gesuchte Gesamtspur ist die Summe von 5.26 und 5.27, d. h.:

$$\left(4n - \frac{2}{3} \right) \sigma_1(n) + 8 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_1(m) \cdot \sigma_1(n-m).$$

Dieser Wert stimmt mit der Spur der linken Seite von 4.24 überein, welche gegeben ist durch

$$\operatorname{Tr}\left(p_B\,\widetilde{T}_n;\;W(A_2)\right) = \frac{10}{3}\,\sigma_3(n).$$

Denn nach 2.4 ist $(X^w - 1)\Big|p_B = \frac{2\,w+6}{w+1}\cdot(X^w-1)$, und nach 5.3 gilt $(X^w-1)\Big|\widetilde{T}_n = \sigma_{w+1}(n)$ für $n \geq 1$. (Einsetzen von $w = 2$ ergibt obige Spur.) Multiplikation beider Spuren mit $\frac{3}{2}$ ergibt die Aussage des Satzes. ∎

KOROLLAR. *Es gilt:*

$$E_4 = E_2^2 - 12\,q\,\frac{d}{dq}\,(E_2)\,,$$

wobei

$$E_2 = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n, \quad E_4 = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)\,q^n.$$

Beweis. Nach Definition gilt $\frac{d}{dq}\,(E_2) = -24\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,q^{n-1}$, also $12\,q\,\frac{d}{dq}\,(E_2) = -12\cdot 24\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,q^n = -288\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,q^n$ und $E_2^2 = 1 - 48\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n + 24^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n\right)^2$. Mit Hilfe der Identität des vorherigen Satzes, die wir auf die vorletzte Zeile der folgenden Rechnung anwenden, erhalten wir die Behauptung:

$$\begin{aligned}
E_2^2 - 12\,q\,\frac{d}{dq}\,(E_2) &= 1 - 48\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n + 24^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n\right)^2 + 288\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,q^n = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(288\,n - 48\big)\,\sigma_1(n)\,q^n + 24^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_1(m)\,\sigma_1(n-m)\right)q^n \\
&= 1 + 48\sum_{n=1}^{\infty}\big(6\,n-1\big)\,\sigma_1(n)\,q^n + 48\cdot 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_1(m)\,\sigma_1(n-m)\right)q^n \\
&= 1 + 48\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big(6\,n-1\big)\,\sigma_1(n) + 12\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_1(m)\,\sigma_1(n-m)\Big)\,q^n \\
&= 1 + 48\cdot 5\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)\,q^n = E_4.
\end{aligned}$$

∎

Literaturverzeichnis

[1] T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Z. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory (Pure & Applied Mathematics)*, Academic Press Inc., 1966.

[3] K. S. Brown, *Cohomology of Groups (Graduate Texts in Mathematics, No. 87)*, Springer, 1982.

[4] J. W. S. Cassels, *Algebraic number theory: proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO advanced study institute) with the support of the International Mathematical Union*, London Mathematical Society, London, 2010.

[5] J. H. Conway and R. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus, 1996.

[6] J. E. Cremona, *Algorithms for Modular Elliptic Curves Full Canadian Binding*, Cambridge University Press, 2 ed., 1997.

[7] F. Diamomd and J. Im, *Modular forms and modular curves*, in Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, vol. 17, American Mathematical Society, 1995, pp. 38–133.

[8] F. Diamond and J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, no. 228 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2005.

[9] B. Edixhoven and J.-M. Couveignes, *Computational aspects of modular forms and Galois representations how one can compute in polynomial time the value of Ramanujan's tau at a prime*, Princeton University Press, Princeton, 2011.

[10] L. Evens, *The Cohomology of Groups (Oxford Mathematical Monographs)*, Clarendon Press, 1991.

[11] S. Fukuhara, *The space of period polynomials*, Acta Arithmetica, LXXXII.1 (1997).

[12] K. Haberland, *Perioden von Modulformen einer Variabler und Gruppencohomologie, I*, Math. Nachr., (1983), pp. 245–282.

[13] ——, *Perioden von Modulformen einer Variabler und Gruppencohomologie, II*, Math. Nachr., (1983), pp. 283–295.

[14] H. Hida, *Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series (London Mathematical Society Student Texts)*, Cambridge University Press, 1993.

[15] A. W. Knapp, *Elliptic Curves*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1992.

[16] W. Kohnen and D. Zagier, *Modular Forms with Rational Periods*, in Proc. Durham Symp. on Modular Functions, Ellis Horwood, 1984, pp. 197–249.

[17] S. Lang, *Introduction to modular forms*, no. 222 in Grundlehren der Math. Wiss., Spriner-Verlag, 1976.

[18] ——, *Algebra*, no. 211 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, revised third ed., 2002.

[19] Y. I. Manin, *Periods of parabolic forms and p-adic hecke series*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 21 (1973), pp. 371–393.

[20] L. Merel, *Universal Fourier expansion of modular forms*, no. 1585 in LNS in Mathematics: On Artin's Conjecture for Odd 2-dimensional Representations, Springer-Verlag, 1994, pp. 59–94.

[21] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1 ed., 1992.

[22] ——, *Klassenkörpertheorie: Neu herausgegeben von Alexander Schmidt (Springer-Lehrbuch) (German Edition)*, Springer, 2011.

[23] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 323, Springer, 2000.

[24] V. Pasol and A. A. Popa, *Modular forms and period polynomials*, Proc. London Math. Soc., 107, Issue 4 (2013), pp. 713–743.

[25] A. A. Popa, *On the trace formula for Hecke operators on congruence subgroups*, ArXiv e-prints:1408.4998, (2014).

[26] D. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer New York, 1996.

[27] A. Sebbar and A. Sebbar, *Eisenstein Series and Modular Differential Equations*, Canad. Math. Bull., 55 (2012), pp. 400–409.

[28] J.-P. Serre, *Trees*, Springer, 1980.

[29] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, no. 11 in Publications of the Mathematical Society of Japan, Princeton University Press, 1971.

[30] W. Stein, *Modular Forms, a Computational Approach (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society, 2007.

[31] X. Wang, *The Hecke operators on the cusp forms of $\Gamma_0(N)$ with nebentype*, no. 1585 in LNS in Mathematics: On Artin's Conjecture for Odd 2-dimensional Representations, Springer-Verlag, 1994, pp. 95–108.

[32] D. Zagier, *Hecke Operators and Periods of Modular Forms*, in Israel Math. Conf. Proceedings, no. 3, 1990, pp. 321–336.

[33] ——, *Periods of Modular Forms, Traces of Hecke Operators and Multiple Zeta Values*, in RIMS Kokyuroku, vol. 843, 1993, pp. 162–170.